

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

APPLICATION DU FORMALISME
DE DIFFUSION MULTIPLE A L'ETUDE
DES COLLISIONS PION-NOYAU
A HAUTE ENERGIE

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

JEAN-FRANÇOIS GERMOND

physicien diplômé

Décembre 1973
Lang Druck S.A., Liebefeld/Berne



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555006_0022

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

APPLICATION DU FORMALISME
DE DIFFUSION MULTIPLE A L'ETUDE
DES COLLISIONS PION-NOYAU
A HAUTE ENERGIE

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

JEAN-FRANÇOIS GERMOND

physicien diplômé

Décembre 1973
Lang Druck S.A., Liebefeld/Berne



IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

APPLICATION DU FORMALISME DE DIFFUSION MULTIPLE

A L'ETUDE DES COLLISIONS PION-NOYAU A HAUTE

ENERGIE

de M. Jean-François Germond

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport de Messieurs les professeurs

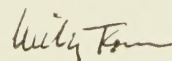
J.P. Amiet, P. Huguenin et C. Wilkin

(Genève)

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 17 décembre 1973

Le doyen:



Willy Form

A B S T R A C T

Starting from the multiple scattering equations in potential theory, we rederive the Glauber theory as well as the expansions of elastic and inelastic optical potentials in powers of the pion-free nucleon scattering amplitude. Both approaches involve a certain number of common approximations, and care has been taken to treat them in the same way. Consequently the results given by the Glauber theory and the first order optical potentials are found to be very close to each other. Numerical examples have been computed for pion-nucleus elastic and inelastic scattering around the $(3,3)$ resonance. In all cases the pion-nucleon scattering amplitude has been parametrized by a Gaussian in momentum transfer.

TABLE DES MATIERES

<u>Introduction</u>	page 1
<u>Chapitre 1</u> : Théorie de diffusion multiple	2
1.1 Equations de diffusion multiple	2
1.2 Approximation eikonale	6
1.3 "Formule" de Glauber	11
1.4 Dérivation de la "formule" de Glauber à partir de la série de diffusion multiple de Watson	18
1.5 Approximation de Blankenbecler-Goldberger	20
<u>Chapitre 2</u> : Potentiel optique	26
2.1 Dérivation du potentiel optique à partir des équations de diffusion multiple	26
2.2 Diffusion élastique et inélastique	31
2.3 Conséquences de l'invariance par renversement du temps	42
2.4 Mouvement du centre de masse	47
<u>Chapitre 3</u> : Comparaisons entre la théorie de Glauber et celle du potentiel optique	55
3.1 Diffusion élastique	56
3.2 Diffusion inélastique	62
3.3 Remarques finales	69

<u>Appendice A</u> : Description du noyau	page 71
<u>Appendice B</u> : Expressions explicites de la "formule" de Glauber	80
<u>Appendice C</u> : Expressions explicites des potentiels optiques	88
<u>Remerciements</u>	95
<u>Références bibliographiques</u>	96
<u>Tables</u>	98
<u>Figures</u>	100

INTRODUCTION

Durant ces dernières années, les résultats expérimentaux sur la diffusion π -noyau à des énergies voisines de la résonance (3,3) ont été généralement analysés, soit par la théorie de diffusion multiple de Glauber, soit au moyen d'un potentiel optique. Or il apparaît que ces deux descriptions du processus de réaction reproduisent raisonnablement bien les sections efficaces mesurées jusqu'à présent. Soulignons encore qu'elles ne contiennent aucun paramètre libre. Il est cependant difficile de comparer quantitativement les résultats provenant de plusieurs auteurs, en raison de leur manière différente de traiter le mouvement du centre de masse, le mouvement de Fermi, les changements de repère cinématique, etc... Aussi avons-nous jugé utile d'entreprendre une étude parallèle de la théorie de Glauber et celle du potentiel optique.

Dans les chapitres 1 et 2, nous redérivons ces deux théories à partir des équations potentielles de diffusion multiple en ayant soin de n'introduire que le minimum d'approximations différentes. Il devient ainsi possible dans tous les cas de factoriser le mouvement du centre de masse. Afin de ne pas obscurcir les comparaisons, nous avons négligé les effets de spin, d'isospin et de Coulomb. Par conséquent et bien que nous désignerons toujours par pion le projectile, notre travail peut s'appliquer à n'importe quelle diffusion hadron-noyau à haute énergie.

Enfin dans le chapitre 3, nous comparons quelques résultats de la théorie de Glauber et du potentiel optique au premier ordre. Les calculs numériques sont tirés essentiellement d'un article écrit précédemment [GA] .

CHAPITRE 1 : THEORIE DE DIFFUSION MULTIPLE DE GLAUBER

1.1 Equations de diffusion multiple

Considérons la diffusion d'un pion sur un noyau constitué de A nucléons. Dans le cas où, après diffusion, ce noyau cible se retrouve dans un état lié (excité ou non), la matrice de transition T satisfait l'équation de Lippmann-Schwinger [Fe]

$$T(E') = V + V \frac{1}{E' - H_0 + i0} T(E') \quad (1.1)$$

Cette équation est écrite dans le centre de masse pion-noyau et E' représente l'énergie totale pion + noyau dans ce système. Le potentiel d'interaction V s'exprime par

$$V = \sum_{j=1}^A v_j A, \quad (1.2)$$

où v_j représente le potentiel d'interaction du pion avec le $j^{\text{ème}}$ nucléon et A l'opérateur d'antisymétrisation des nucléons de la cible. La présence de cet opérateur A dans l'interaction V implique que $T(E')$ contient un projecteur sur les états complètement antisymétrisés de la cible.

Dans l'équation (1.1), l'hamiltonien $H_0 = K + H_A$ est composé de deux termes :

a) l'opérateur d'énergie cinétique relative du pion :

$$K|\vec{p}\rangle = \frac{\vec{p}^2}{2m} |\vec{p}\rangle \quad ; \quad m = \frac{m_\pi M_A}{m_\pi + M_A} \quad , \quad (1.3)$$

b) l'hamiltonien nucléaire interne [†] :

$$H_A |\phi_\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\phi_\alpha\rangle \quad ; \quad \alpha = 0, 1 \dots \quad (1.4)$$

L'indice α numérote tous les états propres (liés et du continu) de H_A ; par convention, $\alpha = 0$ correspondra à l'état fondamental du noyau. Les fonctions d'onde ϕ_α forment un système orthonormé complet dans le sous-espace des fonctions complètement antisymétrisées, i.e.

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.5a)$$

$$\sum_\alpha |\phi_\alpha\rangle \langle \phi_\alpha| = A \quad . \quad (1.5b)$$

Définissant les éléments de matrice de T et V dans la base des états propres de H_0 par

$$T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' \phi_\beta | T | \vec{p} \phi_\alpha \rangle \Rightarrow \underline{T} = \{T_{\beta\alpha}\} \quad , \quad (1.6a)$$

$$V_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' \phi_\beta | V | \vec{p} \phi_\alpha \rangle \Rightarrow V = \{V_{\beta\alpha}\} \quad , \quad (1.6b)$$

[†] Les propriétés principales des fonctions propres ϕ_α et des grandeurs associées $\mathcal{G}_{\beta\alpha}^{(n)}$ sont rappelées dans l'appendice A.

l'équation de Lippmann-Schwinger (1.1) s'explicite comme

$$T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}; E) = V_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) + \sum_{\gamma} \int d^3x \frac{V_{\beta\delta}(\vec{p}', \vec{x}) T_{\delta\alpha}(\vec{x}, \vec{p}; E)}{E - \frac{x^2}{2m} - (\epsilon_{\gamma} - \epsilon_0) + i0}, \quad (1.7)$$

où $E = E' - \epsilon_0 = K^2/2m$ représente l'énergie cinétique relative du pion incident. Par la suite, ce paramètre E figurant dans la matrice T sera généralement sous-entendu. Remarquons que l'équation (1.7) représente en fait un système d'une infinité d'équations intégrales couplées. Nous sommes intéressés au cas où l'énergie E est grande, c'est-à-dire lorsque

$$E = \frac{K^2}{2m} \gg \epsilon_{\gamma} - \epsilon_0. \quad \forall \gamma \text{ contribuant significativement dans la sommation de l'équation (1.7).} \quad (1.8)$$

Cette hypothèse consiste à considérer que les états intermédiaires du noyau sont dégénérés par rapport à l'énergie cinétique relative du pion incident. Elle correspond formellement à poser $H_A = \epsilon_0$ dans l'équation de Lippmann-Schwinger de départ (1.1). Dans ce cas-là, on montre [FW] que l'amplitude de diffusion pion-noyau peut se calculer à partir de la diffusion sur A nucléons fixés. C'est pourquoi l'approximation (1.8) est souvent désignée par approximation des diffuseurs fixés (FSA) ou du noyau gelé (frozen nucleus).

Moyennant la condition (1.8), la matrice T satisfait l'équation intégrale :

$$\underline{T}(\vec{p}', \vec{p}; E) = \underline{V}(\vec{p}', \vec{p}) + \int d^3x \frac{\underline{V}(\vec{p}', \vec{x}) \underline{T}(\vec{x}, \vec{p}; E)}{E - \frac{x^2}{2m} + i0} \quad (1.9)$$

Nous envisagerons de plus le cas où le potentiel d'interaction pion-nucléon $\underline{V}(\vec{x})$ est local, ce qui permet d'écrire

$$\underline{V}(\vec{p}', \vec{p}) = \underline{V}(\vec{p}' - \vec{p}) = A \underline{V}(\vec{p}' - \vec{p}) \tilde{\underline{Q}}(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (1.10a)$$

ou encore [†]

$$\underline{V}(\vec{x}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \underline{V}(\vec{q}) d^3q = A \int d^3y \underline{V}(\vec{x} - \vec{y}) \tilde{\underline{Q}}(\vec{y}). \quad (1.10b)$$

L'effet du noyau est entièrement contenu dans la matrice densité

$\tilde{\underline{Q}}$ (resp. $\underline{Q}$) définie par

$$\tilde{\underline{Q}}_{\mathcal{N}}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \underline{Q}_{\mathcal{N}}(\vec{x}) d^3x = \langle \phi_{\mathcal{N}} | \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} | \phi_{\mathcal{N}} \rangle, \quad (1.11)$$

[†] Sauf lorsqu'il s'agit de la densité $\underline{Q}$ ($\tilde{\underline{Q}}$), nous convenons de désigner par un même symbole une fonction et sa transformée de Fourier.

et dont les propriétés sont discutées dans l'appendice A. A noter que les fonctions d'onde ϕ_α dépendent des coordonnées intrinsèques $\{\xi_j\}$ des nucléons calculées à partir du centre masse du noyau et que le produit scalaire est défini avec la mesure $d\xi = d^3\xi_1 \dots d^3\xi_A \delta^{(3)}\left(\frac{1}{A}\sum \xi_j\right)$. Ainsi le recul du noyau est-il pris en considération de manière exacte. Remarquons d'autre part que le potentiel $\underline{V}(\vec{x})$ satisfait la relation de commutation

$$[\underline{V}(\vec{x}), \underline{V}(\vec{x}')] = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{x}' \quad (1.12)$$

qui découle de la propriété de commutation (A.12) des matrices $\underline{S}^{(n)}$ et qui permettra d'obtenir une solution eikonale explicite de l'équation de Lippmann-Schwinger (1.9).

1.2 Approximation eikonale

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats sur l'approximation eikonale de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$\underline{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \underline{V}(\vec{p}' - \vec{p}) + \int d^3x \underline{V}(\vec{p}' - \vec{x}) G_0(\vec{x}) \underline{T}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (1.13)$$

où $G_0(\vec{x})$ désigne le propagateur libre, c'est-à-dire :

$$G_0(\vec{x}) = \left[\frac{k^2}{2m} - \frac{\vec{x}^2}{2m} + i0 \right]^{-1}. \quad (1.14)$$

L'approximation eikonale consiste à remplacer ce propagateur exact par un propagateur approximatif de la forme linéarisée suivante [G1] :

$$\hat{G}_0(\vec{x}) = \frac{1}{\vec{k}_0 \cdot (\vec{k}_0 - \vec{x}) + i0} = \frac{1}{\frac{k}{m}(k - x_3) + i0} . \quad (1.15)$$

A noter que $\hat{G}_0(\vec{x})$ dépend de la direction du vecteur $\vec{k}_0$. Ayant fixé conventionnellement l'axe 3 parallèle à $\vec{k}_0$ (i.e. $\vec{k}_0 = k \vec{e}_3$), il en découle que $\hat{G}_0(\vec{x})$ dépend de la direction de l'axe 3. Nous choisirons l'approximation eikonale correspondant à

$$\vec{k}_0 = k \vec{e}_3 = k \frac{\vec{p}' + \vec{p}}{|\vec{p}' + \vec{p}|} , \quad (1.16)$$

qui a l'avantage de préserver l'invariance par renversement du temps. En revanche, elle implique que la direction de l'axe 3 varie par rapport au faisceau incident en fonction de l'angle de diffusion.

Comme conséquence importante de la linéarisation du propagateur, on a conservation de la composante 3 de l'impulsion qui remplace la conservation de l'énergie [0s]. Ainsi, on obtient les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{p} \text{ sur couche (noté } \vec{p}_1) &\Leftrightarrow p_3 = K , \\ \vec{p} \text{ hors-couche} &\Leftrightarrow p_3 \neq K . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Substituant le propagateur eikonal dans l'équation de Lippmann-Schwinger (1.13), il vient :

$$\hat{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \underline{V}(\vec{p}' - \vec{p}) + \int d^3x \underline{V}(\vec{p}' - \vec{x}) \hat{G}_0(\vec{x}) \hat{T}(\vec{x}, \vec{p}), \quad (1.18)$$

dont une solution explicite est facilement obtenue en passant dans l'espace des coordonnées. En effet, le propagateur eikonal libre y a la forme particulièrement simple

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(\vec{x}', \vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\vec{x}' \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \\ &= -i \frac{m}{k} \delta^{(2)}(\vec{b}' - \vec{b}) \theta(\vec{z}' - \vec{z}) e^{ik(\vec{z}' - \vec{z})}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où $\vec{b}$ et $\vec{b}'$ sont les composantes de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ perpendiculaires à l'axe 3 et $\vec{z}$ et $\vec{z}'$ les projections de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ selon l'axe 3[†].

Après quelques calculs, on obtient :

$$\hat{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{-iV}{(2\pi)^3} \int d^3b e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{b}} \int d^3z e^{i(k - p_3)z'} \left[\frac{\partial U(\vec{b}, z')}{\partial \vec{z}'} \right] \int d^3z e^{-i(k - p_3)z} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \left[\theta(\vec{z}' - \vec{z}) U^*(\vec{b}, z) \right], \quad (1.20)$$

[†] Cette convention $\vec{x} = \vec{b} + \vec{z} \vec{e}_3$ sera par la suite toujours adoptée, donc sous-entendue.

où $v = k/m$ représente la vitesse relative du pion incident et $\underline{U}(\vec{x})$ satisfait l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{U}(\vec{b}, z)}{\partial z} = - \frac{i}{v} \underline{V}(\vec{b}, z) \underline{U}(\vec{b}, z) \\ \underline{U}(\vec{b}, -\infty) = \underline{1} \end{cases} \quad (1.21)$$

Dans le cas où la condition de commutation (1.12) est satisfaite, c'est-à-dire si $[\underline{V}(\vec{x}'), \underline{V}(\vec{x})] = 0$, le système (1.21) admet la solution :

$$\underline{U}(\vec{b}, z) = e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z \underline{V}(\vec{b}, z') dz'} \quad (1.22)$$

Notons que l'expression (1.20) pour la matrice de transition $\hat{T}$ est valable aussi bien hors-couche que sur couche. Comme on peut le constater, $\hat{T}$ ne dépend pas que du transfert d'impulsion $\vec{p}' - \vec{p}$, mais encore de $\vec{p}'$ et $\vec{p}$ séparément. Cependant, pour des valeurs de la matrice $\hat{T}$ sur couche, c'est-à-dire pour $\vec{p}' = \vec{p} = K$, l'expression (1.20) se réduit à

$$\hat{T}(\vec{p}_1', \vec{p}_1) = -i \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \cdot \vec{b}} d^2b \left[\underline{1} - \underline{U}(t, \infty) \right], \quad (1.23)$$

qui ne dépend que de $\vec{p}_1' - \vec{p}_1$. En plus, l'énergie n'y apparaît que sous la forme de la vitesse relative v du pion par rapport à la cible. L'amplitude de diffusion $\hat{F}$ reliée à la matrice $\hat{T}$ par

$$\hat{F}(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) = -(2\pi)^2 m \hat{T}(\vec{p}_1', \vec{p}_1) \quad (1.24)$$

s'écrit de manière conventionnelle

$$\hat{F}(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \hat{\Gamma}(b) d^2b, \quad (1.25)$$

où

$$\hat{\Gamma}(b) = \underline{1} - \underline{U}(t, \infty) = 1 - e^{i\hat{\chi}(b)} \quad (1.26)$$

est la fonction de profil et

$$\hat{\underline{X}}(\underline{k}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{V}(\underline{k}, z) dz \quad (1.27)$$

le déphasage en paramètre d'impact. Le vecteur $\vec{q}$ désigne ici le transfert d'impulsion total. En effet, en raison de notre choix (1.16) de l'axe 3, la composante de $\vec{q}$ selon cet axe est nulle et $\vec{q} = \vec{q}_1$.

Ajoutons encore que tous les résultats cités dans ce paragraphe seront utilisés pour décrire non seulement la diffusion pion-noyau (avec les notations du paragraphe (1.1), mais aussi la diffusion pion-nucléon (avec les mêmes symboles, mais en minuscule). Comme de plus, l'hermiticité de l'interaction $\underline{V}$ n'intervient pas, nous pourrons aussi appliquer ces résultats au cas des potentiels optiques.

1.3 "Formule" de Glauber

Commençons par linéariser le propagateur de l'équation de Lippmann-Schwinger (1.9) décrivant la diffusion pion-noyau. Dans le cas où le potentiel pion-nucléon $\underline{V}$ est local, ce que nous supposons par la suite, nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe précédent.

En particulier, comme $[\underline{V}(\vec{x}), \underline{V}(\vec{x}')] = 0$, l'amplitude de diffusion pion-noyau est donnée par les relations (1.25), (1.26) et (1.27). Explicitant la matrice des déphasages $\hat{\underline{X}}(\underline{k})$, il vient :

$$\hat{\chi}(\vec{k}) = - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dz \, V(\vec{k}, z) = A \int d^2s dz \, \hat{\chi}(\vec{k}-\vec{s}) \, \rho(\vec{s}, z), \quad (1.28)$$

où l'on a fait apparaître explicitement le déphasage eikonal de la diffusion pion-nucléon libre défini par

$$\hat{\chi}(\vec{k}) = - \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{k}, z) dz. \quad (1.29)$$

Notons dans la relation (1.27) entre $\hat{\chi}$ et $\hat{\chi}$ l'absence de tout facteur cinématique provenant du chargement de référentiel ! Cette propriété est due au fait que le déphasage eikonal ne dépend que de la vitesse relative v du pion par rapport à la cible. Or si la cible est au repos dans le laboratoire, v est identique pour la diffusion pion-nucléon et pion-noyau; elle ne dépend que de l'énergie cinétique $T_{\text{dans le lab}}$ du pion incident/le laboratoire.

Substituant (1.28) dans (1.25-1.26), on obtient l'expression suivante pour l'amplitude de diffusion pion-noyau en approximation eikonale :

$$\hat{F}(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left(1 - e^{iA \int d^2s dz \chi(\vec{b}-\vec{s}) \rho(\vec{s}, z)} \right) \quad (1.30)$$

On y reconnaît l'addition des déphasages typique de la théorie de diffusion multiple de Glauber. Cependant cette forme de l'amplitude de diffusion fait intervenir la matrice infinie $\underline{Q}(\vec{x})$ mal adaptée à des calculs numériques. Cherchons la forme équivalente qui ne fait apparaître que les fonctions d'onde nucléaires de l'état final et initial. Pour cela, on calcule les éléments de matrice de $\underline{X}(\vec{b})$ (utiliser (1.11))

$$X_{\gamma\gamma'}(\vec{b}) = \langle \phi_{\gamma} | \sum_{j=1}^A \chi(\vec{b} - \vec{r}_j) | \phi_{\gamma'} \rangle, \quad (1.31)$$

où $\vec{r}_j$ représente le paramètre d'impact de $j^{\text{ème}}$ nucléon[†], c'est-à-dire la composante de sa position perpendiculaire à l'axe 3 défini ci-dessus. Puis

[†] Cette grandeur est définie par rapport au centre de masse du noyau. Dans ce système, le $j^{\text{ème}}$ nucléon est repéré par le vecteur $\vec{r}_j = \vec{r}_j + \sum_j \vec{r}_j$

$$\left[e^{i \hat{\chi}(\vec{b})} \right]_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i \hat{\chi}(\vec{b}) \right)_{\beta\alpha}^n \quad (1.32a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}} \langle \phi_{\beta} | i \sum_{j=1}^A \hat{\chi}(\vec{b} - \vec{r}_{j1}) | \phi_{\gamma_1} \rangle \langle \phi_{\gamma_1} | \dots | \phi_{\gamma_{n-1}} \rangle \langle \phi_{\gamma_{n-1}} | i \sum_{j=1}^A \hat{\chi}(\vec{b} - \vec{r}_{jn}) | \phi_{\alpha} \rangle \quad (1.32b)$$

$$= \langle \phi_{\beta} | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[i \sum_{j=1}^A \hat{\chi}(\vec{b} - \vec{r}_j) \right]^n | \phi_{\alpha} \rangle \quad (1.32c)$$

$$= \langle \phi_{\beta} | e^{i \sum_{j=1}^A \hat{\chi}(\vec{b} - \vec{r}_j)} | \phi_{\alpha} \rangle \quad (1.32d)$$

Le passage de (1.32b) à (1.32c) est possible parce que l'opérateur

$\sum_{j=1}^A \hat{\chi}(\vec{b} - \vec{r}_j)$ est symétrique en les coordonnées des nucléons

et que l'ensemble des fonctions d'onde nucléaires est complet dans le sous-espace des fonctions complètement antisymétriques (voir (1.5b)).

Définissant la fonction de profil eikonale $\hat{\gamma}$ de la diffusion pion-nucléon libre par

$$\hat{\gamma}(\vec{b}) = 1 - e^{i \hat{\chi}(\vec{b})} \quad (1.33)$$

et utilisant la relation (1.32), l'amplitude de diffusion pion-noyau en approximation eikonale s'écrit

$$\hat{F}_{\beta\alpha}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} \langle \phi_\beta | 1 - \prod_{j=1}^A (1 - \hat{\gamma}(\vec{b} - \vec{r}_j)) | \phi_\alpha \rangle, \quad (1.34)$$

où α et β désignent l'état du noyau avant et après diffusion. Cette relation fonctionnelle entre $\hat{F}$ et $\hat{\gamma}$ est par construction équivalente à la relation (1.30). Rappelons qu'elle a été obtenue à partir de l'équation de Lippmann-Schwinger de départ (1.1) avec un potentiel pion-nucléon local et en faisant usage des deux approximations :

- a) Dégénérescence des états nucléaires intermédiaires (équation (1.8)).
- b) Linéarisation du propagateur libre G_0 (équation (1.15)).

Ces deux approximations sont justifiables à haute énergie. Pour obtenir la "formule" de diffusion multiple de Glauber, il s'agit encore dans l'expression (1.34) de faire les deux substitutions :

$$\hat{\gamma} \longrightarrow \gamma \quad \text{et} \quad \hat{F} \longrightarrow F, \quad (1.36)$$

c'est-à-dire supposer que la relation fonctionnelle entre F et γ est bien approchée par celle entre $\hat{F}$ et $\hat{\gamma}$, soit

$$F_{\beta\alpha}(\vec{q}) \approx F_{\beta\alpha}^G(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} \langle \phi_\beta | 1 - \prod_{j=1}^A (1 - \gamma(\vec{b} - \vec{r}_j)) | \phi_\alpha \rangle. \quad (1.37)$$

Notons que cette dernière substitution peut accroître le domaine de validité de la "formule" de Glauber au-delà du domaine de validité des

approximations a) et b) ci-dessus [0s] . En ce sens, la théorie de diffusion multiple de Glauber a un caractère phénoménologique qui se résume simplement en l'additivité des déphasages. Une autre caractéristique remarquable de la "formule" de Glauber (1.37) réside dans le fait que $\underline{F}^G$ ne dépend que de la fonction de profil pion-nucléon. Or cette dernière permet seulement de paramétriser l'amplitude de diffusion pion-nucléon libre f sur couche (équation (1.23) et non pas (1.2)), soit

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \chi(b), \quad (1.38)$$

où $k = k(E)$ est l'impulsion relative du pion dans le système pion-nucléon. Il s'ensuit que les effets hors-couche pion-nucléon n'apparaissent pas dans l'amplitude pion-noyau. Cela ne signifie en aucun cas qu'ils sont absents de la théorie ; seulement et comme le montre notre dérivation, ils se compensent exactement dans le cadre de l'approximation eikonale. De plus, dans le développement en série de diffusion multiple de $\underline{F}^G$

$$\underline{F}_{\beta\alpha}^G(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_\beta | \sum_{n=1}^A \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1 \dots j_n}^{n-1} \chi(b-\vec{r}_{j_1}) \dots \chi(b-\vec{r}_{j_n}) | \phi_\alpha \rangle \quad (1.39)$$

apparaît une somme $\sum^1$ signifiant que tous les indices répétés sont omis. Ainsi, aucun terme dans ce développement ne contient une rediffusion sur le même nucléon et la série est finie.

Enfin le calcul de l'amplitude pion-noyau à l'aide de la "formule" de Glauber nécessite la connaissance des fonctions d'onde nucléaires intrinsèques de l'état initial et final. Généralement, celles-ci sont construites à partir d'un modèle qui n'est pas invariant par translation, ce qui ne permet pas de les introduire sans autre dans la "formule" de Glauber. Cependant, dans le cas du modèle en couche de l'oscillateur harmonique,

$$\phi_{\alpha}^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \psi_{cm}(\vec{X}) \phi_{\alpha}(\vec{\xi}_1 \dots \vec{\xi}_A), \quad (1.40)$$

où $\vec{x}_j = \vec{s}_j + \vec{z}_j \vec{e}_3$ repère la position du $j^{\text{ème}}$ nucléon à partir d'un centre fixe et $\vec{X} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \vec{x}_j$ la position du centre de masse. La fonction ψ_{cm} représente la fonction d'onde du centre de masse dans son état fondamental. Combinant (1.37) et (1.40), il vient :

$$F_{\beta\alpha}^G(\vec{q}) = \tilde{G}_{cm}^{-1}(\vec{q}) \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_{\beta}^{(M)} | 1 - \prod_{j=1}^A (1 - \chi(b - \vec{s}_j)) | \phi_{\alpha}^{(M)} \rangle, \quad (1.41)$$

avec

$$\tilde{G}_{cm}(\vec{q}) = \langle \psi_{cm} | e^{-i\vec{q} \cdot \vec{X}} | \psi_{cm} \rangle \quad (1.42)$$

facteur de forme du centre de masse. Notons encore que la factorisation (1.41) du mouvement du centre de masse est habituellement utilisée même pour des fonctions d'onde ne satisfaisant pas (1.40). Dans ce cas-là, le mouvement du centre de masse n'est donc traité qu'approximativement.

1.4 Dérivation de la "formule" de Glauber à partir de la série de diffusion multiple de Watson

Par itérations partielles des potentiels V_i dans l'équation de Lippmann-Schwinger (1.1), on montre [GW] que la matrice T de transition se développe formellement en une série infinie (série de diffusion multiple de Watson) de la forme :

$$T(E') = \left\{ \sum_j t_j + \sum_{j \neq k} t_j \frac{1}{E' - H_0 + i0} t_k + \sum_{j \neq k \neq l} t_j \frac{1}{E' - H_0 + i0} t_k \frac{1}{E' - H_0 + i0} t_l + \dots \right\} \quad (1.43)$$

où

$$t_j = V_j + V_j \frac{1}{E' - H_0 + i0} t_j \quad (1.44)$$

est la matrice de transition pour la diffusion du pion sur le $j^{\text{ème}}$ nucléon lié dans le noyau. Remarquons que la série (1.43) contient des termes de rediffusion sur le même nucléon. D'autre part, le calcul des éléments de matrice de $T(E')$ fait intervenir des valeurs hors-couche des matrices de transition ξ_j . Cependant, si l'on injecte les deux approximations (1.35) dans les expressions (1.43) et (1.44), on retrouve les résultats du paragraphe précédent et moyennant la substitution $\hat{\chi} \rightarrow \chi$ la "formule" de Glauber (1.37). Or, comme on l'a vu, cette dernière ne contient aucun terme de rediffusion et ne fait pas intervenir le comportement hors-couche de la matrice de transition pion-nucléon. Cela signifie que dans la série (1.43), de nombreux termes se compensent lorsque les approximations (1.35) sont réalisées[†]. Il en découle aussi que la "formule" de Glauber peut être obtenue à partir de la série de diffusion multiple de Watson, en faisant les approximations suivantes [Re] :

- a) Suppression des rediffusions
 - b) Approximation d'impulsion pour les ξ_j
 - c) Dégénérescence des états nucléaires intermédiaires
 - d) Linéarisation du propagateur
- (1.45)

Les deux dernières approximations sont identiques à celles (1.35) utilisées pour notre dérivation du paragraphe 3. En revanche les deux premières sont supplémentaires, mais étroitement liées. En effet, l'approximation d'impulsion des ξ_j revient à considérer qu'ils décrivent la diffusion pion-nucléon libre et ne dépendent que du moment de transfert. On fixe ainsi une dépendance hors-couche qui n'est pas celle apparaissant à haute énergie (voir formule (1.20)) et la condition a) devient nécessaire pour simuler des compensations de termes.

Ces compensations ont été étudiées en détail par Harrington [Ha] dans le cas du deuterium et récemment par Eisenberg [Ei] pour des noyaux

Avec ce paragraphe, se termine l'étude des relations entre la théorie potentielle de la diffusion multiple et celle de Glauber. Les deux dérivations considérées sont résumées sur la figure 1.

1.5 Approximation de Blankenbecler-Goldberger

La méthode du paragraphe (1.3), qui permet de rétablir la "formule" de Glauber à partir des équations potentielles de diffusion multiple en linéarisant le propagateur, peut être aussi appliquée pour d'autres approximations du propagateur. Dans ce paragraphe, sera considéré le cas où la partie principale du propagateur est négligée, i.e.

$$G_0(\vec{x}) \longrightarrow \overset{V}{G}_0(\vec{x}) = -i\mathcal{V} \delta\left(\frac{1}{2m}(K^2 - \vec{x}^2)\right). \quad (1.46)$$

Cela revient à supposer que le pion se propage sur couche d'énergie, c'est-à-dire $|\vec{x}| = K$. Partant de l'équation (1.13), il vient :

$$\overset{V}{T}(\vec{p}', \vec{p}) = \overset{V}{V}(\vec{p}' - \vec{p}) - i \frac{\mathcal{V}}{v} \int d^2x \overset{V}{V}(\vec{p}' - \vec{x}) \overset{V}{T}(\vec{x}, \vec{p}). \quad (1.47)$$

sphère de
rayon K

Afin d'obtenir une représentation en paramètre d'impact, qui seule nous intéresse dans ce chapitre, il s'agit de remplacer l'intégration

sur la sphère de rayon K par une intégration sur le plan tangent à celle-ci au point $\vec{K}_0 = (\vec{p}' + \vec{p}) / |\vec{p}' + \vec{p}|$. Cette approximation est justifiée, lorsque la matrice de transition $\underline{\hat{T}}$ est fortement piquée vers l'avant et l'angle de diffusion pas trop grand. Elle correspond en fait à remplacer la conservation de l'énergie dans (1.45) par la conservation de la composante 3 de l'impulsion, si bien que l'on est amené à ne considérer que le terme de pôle du propagateur eikonal $\hat{G}_0(\vec{x})$ (1.15). Par transformation de Fourier, l'équation (1.47) se réduit alors à

$$\underline{\hat{F}}^v(\vec{b}) = -i \underline{\hat{X}}(\vec{b}) \left[\underline{1} - \frac{1}{2} \underline{\hat{F}}^v(\vec{b}) \right], \quad (1.48)$$

où $\underline{\hat{X}}(\vec{b})$ est la matrice des déphasages définie par (1.28). Il en découle que l'amplitude pion-noyau prend la forme :

$$\underline{\hat{F}}^v(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left[\underline{1} - \frac{\underline{1} + \frac{1}{2}i \underline{\hat{X}}(\vec{b})}{\underline{1} - \frac{1}{2}i \underline{\hat{X}}(\vec{b})} \right] \quad (1.49)$$

Dans le cas où $\underline{V}$ est scalaire et de symétrie sphérique, on retrouve l'approximation en paramètre d'impact de Blankenbecler-Goldberger (voir [GW] p. 617-621 et [Mo]). Par la même technique que celle utilisée au paragraphe 3, on fait apparaître ensuite les fonctions d'onde nucléaires de l'état initial et final, d'où

$$F_{\beta\alpha}^{\nu}(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} \langle \phi_{\beta} | 1 - \frac{1 + i \sum_j t_j \left(\frac{1}{2} \chi^{\nu}(\vec{b}-\vec{r}_j) \right)}{1 - i \sum_j t_j \left(\frac{1}{2} \chi^{\nu}(\vec{b}-\vec{r}_j) \right)} | \phi_{\alpha} \rangle. \quad (1.50)$$

La relation liant le déphasage eikonal à celui de l'approximation de Blankenbecler-Goldberger

$$\hat{\chi}^{\nu}(\vec{b}) = 2 + g \frac{1}{2} \chi^{\nu}(\vec{b}) \quad (1.51)$$

a été explicitement utilisée pour écrire (1.50), afin que n'y figurent que des grandeurs calculées selon cette dernière approximation. Ainsi la forme (1.50) met en évidence la propriété essentielle de cette approximation, à savoir l'addition de la tangente des déphasages. Par le remplacement

$$\hat{F}^{\nu} \longrightarrow F \quad \text{et} \quad \hat{\chi}^{\nu} \equiv 1 - e^{i\chi^{\nu}} \longrightarrow \chi, \quad (1.52)$$

l'amplitude de diffusion pion-noyau s'écrit alors :

$$F_{\beta\alpha}(\vec{q}) \approx F_{\beta\alpha}^{BG}(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_\beta | 1 - \frac{1 - \sum_{j=1}^A \frac{\frac{1}{2}\gamma(\vec{b}-\vec{b}_j)}{1 - \frac{1}{2}\gamma(\vec{b}-\vec{b}_j)}}{1 + \sum_{j=1}^A \frac{\frac{1}{2}\gamma(\vec{b}-\vec{b}_j)}{1 - \frac{1}{2}\gamma(\vec{b}-\vec{b}_j)}} | \phi_\alpha \rangle. \quad (1.53)$$

Cette relation représente le résultat principal de ce paragraphe. Rappelons qu'elle a été obtenue à partir de l'équation de Lippmann-Schwinger (1.1) avec un potentiel pion-nucléon local et en faisant usage des deux approximations (1.54) :

- a) Dégénérescence des états nucléaires intermédiaires (équation (1.8))
- b) Suppression de la valeur principale du propagateur + approximation des petits angles

et du remplacement (1.52).

Afin de comparer la solution (1.53) à celle de Glauber, écrivons son développement en série de diffusion multiple :

$$F_{\beta\alpha}^{BG}(\vec{q}) = \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_\beta | \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n} \gamma(\vec{b}-\vec{b}_{j_1}) \dots \gamma(\vec{b}-\vec{b}_{j_n}) | \phi_\alpha \rangle. \quad (1.55)$$

Observons que la sommation dans le membre de droite n'est restreinte

qu'à des indices contigus différents. Il en découle que cette série contient des termes de rediffusion sur le même nucléon et possède alors une infinité de termes. Elle s'obtient d'ailleurs aussi directement à partir de la série de diffusion de Watson (1.43) moyennant les hypothèses (1.54). Ayant négligé tous les effets hors-couche en omettant la partie principale du propagateur, $G_0(\vec{x})$, aucune compensation n'a lieu dans ce cas-ci. Donc et par opposition à la "formule" de Glauber, l'expression (1.55) permet de calculer l'amplitude pion-noyau à partir de l'amplitude pion-nucléon libre, parce que les effets hors-couche ont été supprimés de la théorie et non parce qu'ils se sont compensés. Une comparaison terme à terme de (1.55) et (1.39) montre que jusqu'au terme de diffusion double les séries sont identiques. Au-delà, il apparaît que l'inclusion d'effet hors-couche de manière eikonale supprime les rediffusions sur le même nucléon et accélère la convergence ($1/n!$ au lieu de $1/2^{n-1}$).

Conclusions du chapitre 1 :

Dans ce chapitre, nous avons dérivé deux approximations permettant de relier la diffusion pion-noyau à celle pion-nucléon libre et à la structure nucléaire. Pour ce faire, nous sommes partis de la théorie potentielle de diffusion multiple et avons approximé le propagateur libre a) en le linéarisant (Glauber), b) en négligeant sa partie principale (Blankenbecler-Goldberger). En plus, nous avons supposé que les états nucléaires intermédiaires étaient dégénérés. Il en a découlé une relation fonctionnelle entre l'amplitude de diffusion pion-noyau et l'amplitude pion-nucléon libre, caractérisée par l'addition dans le premier cas des déphasages et dans le second de la tangente des déphasages. A chaque fois, la diffusion pion-nucléon n'intervient que par

l'intermédiaire de sa fonction de profil, que l'on peut tirer directement des mesures de diffusion élastique pion-nucléon. Ainsi les effets hors-couche sont totalement absents des expressions finales obtenues. Cependant, il est à noter que dans la dérivation de la "formule" de Glauber, les termes de la série de diffusion multiple, provenant d'effet hors-couche pion-nucléon, servent à supprimer les rediffusions du pion sur le même nucléon. Enfin la structure nucléaire apparaît seulement dans les fonctions d'onde de l'état initial et final du noyau, propriété qui découle du fait que les états intermédiaires ont été considérés comme dégénérés.

La question du domaine de validité de ces approximations a été intentionnellement oubliée, car elle n'est pas encore élucidée complètement. Seule une comparaison numérique avec l'expérience permet pour l'instant de juger ces approximations. Notons que cette comparaison est rendue facile par la simplicité des expressions obtenues.

CHAPITRE 2 : POTENTIEL OPTIQUE

2.1 Dérivation du potentiel optique à partir des équations de diffusion multiple

Dans cette étude, nous considérons la diffusion d'un pion sur un noyau qui reste dans un état lié après collision. Comme nous l'avons vu, ce processus est décrit par la matrice de transition T satisfaisant le système d'équations intégrales couplées :

$$T = V + V \frac{1}{d} T, \quad (2.1)$$

avec $d = E - K - (H_A - \epsilon_0) + i0$ et $V = \sum_{j=1}^A V_j A$.

Dans le premier chapitre, nous avons vu deux approximations du propagateur $1/d$ permettant de relier T à l'amplitude de diffusion pion-nucléon (équations (1.39) et (1.55)). Rappelons que l'avantage d'approximer le propagateur réside dans la simplicité des expressions finales obtenues. En revanche, la question de l'amélioration de ces expressions n'est pas encore résolue. Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à décrire la diffusion pion-noyau au moyen d'un potentiel optique qui ne nécessite pas en principe d'approximation du propagateur. Cependant toute la complexité du problème à $A + 1$ corps se retrouve dans l'expression de ce potentiel optique; d'autres approximations deviennent alors nécessaires afin que l'on puisse l'utiliser au calcul des sections efficaces.

Suivant Kerman, Mc Manus et Thaler [KM], nous introduisons un opé-

rateur potentiel optique U décrivant la diffusion pion-noyau par l'intermédiaire de l'équation

$$T' = U + U \frac{\Lambda_0}{d} T', \quad (2.2)$$

où T' est reliée à la matrice de transition T par .

$$T = \frac{A}{A-1} T'. \quad (2.3)$$

L'opérateur Λ_0 représente le projecteur sur l'état fondamental du noyau, à savoir [†]

$$\Lambda_0 = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|. \quad (2.4)$$

On vérifie immédiatement qu'il commute avec les opérateurs A et $\mathcal{L}$ donc que

[†] Si le moment cinétique total de l'état fondamental n'est pas nul, Λ_0 contient une sommation sur toutes les orientations possibles.

$$\Lambda_o A = A \Lambda_o = \Lambda_o , \quad (2.5)$$

$$\Lambda_o d^{-1} = d^{-1} \Lambda_o = (E - K)^{-1} \Lambda_o = G_o \Lambda_o .$$

La présence de ce projecteur dans l'équation (2.2) provient du fait que le noyau se trouve toujours dans l'état fondamental avant diffusion. Montrons que si l'opérateur potentiel optique $\mathcal{U}$ est défini par les relations

$$\mathcal{U} = \frac{A-1}{A} \sum_j U_j A = (A-1) A U_j A , \quad (2.6a)$$

$$u_j = t_j + t_j \frac{1-\Lambda_o}{d} \sum_{k \neq j} U_k , \quad (2.6b)$$

$$t_j = v_j + v_j \frac{1}{d} t_j , \quad (2.7)$$

alors la résolution de l'équation (2.2) est équivalente à celle de l'équation (2.1). Pour ce faire, on multiplie à gauche (2.6b) par $(1 - v_j d^{-1})$ d'où

$$\left(1 - V_j \frac{1}{d}\right) u_j = \left(1 - V_j \frac{1}{d}\right) t_j \left(1 + \frac{1 - \Lambda_0}{d} \sum_{k(\neq j)} u_k\right) \quad (2.8a)$$

$$= V_j \left(1 + \frac{1 - \Lambda_0}{d} \sum_{k(\neq j)} u_k\right) . \quad (2.8b)$$

Puis en réordonnant, sommant sur j et multipliant à droite par l'opérateur d'antisymétrie $\mathcal{A}$, il vient

$$\sum_j u_j \mathcal{A} = \sum_j V_j \mathcal{A} \left(1 + \frac{1 - \Lambda_0}{d} \sum_k u_k \mathcal{A} + \frac{\Lambda_0}{d} \mathcal{A} u_j \mathcal{A}\right), \quad (2.9)$$

soit en utilisant (2.6a)

$$\frac{A}{A-1} \mathcal{U} = \mathcal{V} \left[1 + \frac{1}{d} \left(\frac{A}{A-1} - \Lambda_0\right) \mathcal{U}\right] . \quad (2.10)$$

De cette manière, on a obtenu la relation entre le potentiel d'interaction $\mathcal{V}$ et l'opérateur potentiel optique $\mathcal{U}$. Pour achever la démonstration, il s'agit encore de montrer que les équations (2.1) et (2.2) fournissent la même matrice de transition $\mathcal{T}$ lorsque (2.10) est satisfait; ceci devient évident si l'on récrit (2.2) sous la forme

$$\left(1 + T \frac{1}{d}\right) \frac{A}{A-1} U = T \left(1 + \frac{1}{d} \left(\frac{A}{A-1} - \Lambda_0\right) U\right) \quad (2.11)$$

L'opérateur potentiel optique U défini par les relations (2.6) et (2.7) permet ainsi de décrire la diffusion pion-noyau au même titre que le potentiel d'interaction V . Remarquons que les matrices t_j intervenant dans la construction de U (équations (2.6)) et dans la série de diffusion multiple de Watson (1.43) sont identiques. Elles sont reliées à la matrice de transition pion-nucléon libre $t_{\ell; b}$ via l'approximation d'impulsion qui implique dans (1.44) ou (2.7) le remplacement du propagateur $1/d$ par le propagateur libre pion-nucléon. Notons aussi que le développement de U en puissance des t_j

$$U = \frac{A-1}{A} \left\{ \sum_j t_j + \sum_{j \neq k} t_j \frac{1-\Lambda_0}{d} t_k + \sum_{j \neq k \neq \ell} t_j \frac{1-\Lambda_0}{d} t_k \frac{1-\Lambda_0}{d} t_\ell + \dots \right\} A \quad (2.12)$$

est identique à la série de diffusion multiple de Watson (1.43) pour T' si l'on substitue $\frac{1-\Lambda_0}{d}$ par $\frac{1}{d}$. Cette particularité ne subsisterait pas si l'on cherchait un potentiel optique non pas pour T' , mais pour la matrice de transition T . Dans ce cas la définition des t_j devrait être modifiée. Ces dernières seraient alors reliées à $t_{\ell; b}$ via l'approximation d'impulsion à des termes en $1/A$ près, qu'il faudrait négliger lors des calculs [AG]. Enfin il est parfois utile de disposer de la sommation formelle de la série (2.12), soit

$$U = \frac{A-1}{A} \left[\sum_j t_j \left(1 + \frac{1-\Lambda_0}{d} t_j \right)^{-1} \right] \left[1 - \sum_k \frac{1-\Lambda_0}{d} t_k \left(1 + \frac{1-\Lambda_0}{d} t_k \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

2.2 Diffusion élastique et inélastique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les éléments de matrices de T' . Pour cela, nous explicitons l'équation (2.2) dans la base des états propres de $H_0 = K + H_A$ définis par (1.3) et (1.4); il vient

$$T'_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = U_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) + \int d^3x \frac{U_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{x}) T'_{0\alpha}(\vec{x}, \vec{p})}{E - \frac{x^2}{2m} + i0} \quad (2.14)$$

avec

$$U_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) \equiv \langle \vec{p}' \phi_\beta | U | \vec{p} \phi_\alpha \rangle = \quad (2.15a)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x' d^3x e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}'} U_{\beta\alpha}(\vec{x}', \vec{x}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad (2.15b)$$

et

$$T'_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{A-1}{A} T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}). \quad (2.16)$$

Contrairement à l'équation de Lippmann-Schwinger de départ (1.7) avec le potentiel d'interaction $\underline{V}$, le membre de droite de (2.14) ne contient pas de sommation sur des états nucléaires intermédiaires excités. Comme de plus le noyau se trouve toujours dans son état fondamental avant diffusion, on a $\alpha \equiv 0$ avec les deux possibilités : a) $\beta = 0$, diffusion élastique, b) $\beta \neq 0$, diffusion inélastique. L'équation (2.14) devient :

$$T'_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{p}) = U_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{p}) + \int d^3x \frac{U_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{x}) T'_{00}(\vec{x}, \vec{p})}{E - \frac{x^2}{2m} + i0} \quad (2.17)$$

La diffusion pion-noyau est ainsi ramenée à la diffusion élastique d'un pion sur un potentiel optique U_{00} . En effet, la matrice de transition prend la forme

$$T_{\beta_0}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{A}{A-1} \int d^3x' d^3x \frac{e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} U_{\beta_0}(\vec{x}', \vec{x}) \Psi_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}), \quad (2.18)$$

où $\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}$ est la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel optique U_{00} et la condition asymptotique d'onde sortante :

$$\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} + \int d^3x' d^3x'' G_0^{(+)}(\vec{x}, \vec{x}') U_{00}(\vec{x}', \vec{x}'') \Psi_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}''). \quad (2.19)$$

$G_0^{(+)}$ représente le propagateur libre du pion, soit :

$$G_0^{(+)}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{e^{i\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{E - \frac{x^2}{2m} + i0} = -\frac{2m}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.20)$$

A condition que $\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}$ soit calculée par intégration numérique de l'équation de Schrödinger, la description de la diffusion pion-noyau à l'aide d'un opérateur potentiel optique ne contiendra que les approximations faites au niveau de la détermination des éléments de matrice de U .

Dans le cas de la diffusion élastique, l'intégration (2.18) peut être évitée en déterminant la matrice de transition directement à partir du comportement asymptotique de $\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}$.

Pour les calculs explicites, nous supposons comme dans le premier chapitre, que l'énergie du pion incident est suffisamment grande pour que l'hamiltonien nucléaire H_A puisse être négligé dans le propagateur $1/d$ (équation (1.8)). Les nucléons sont dès lors considérés comme fixés dans le noyau et $1/d$ figurant dans (2.6) et (2.7) est remplacé par $G_0^{(+)}$. En particulier, l'interaction pion-nucléon intervient par l'intermédiaire de la matrice t satisfaisant

$$t(\vec{p}', \vec{p}) = V(\vec{p}', \vec{p}) + \int d^3x \frac{V(\vec{p}', \vec{x}) t(\vec{x}, \vec{p})}{E - \frac{\alpha^2}{2m} + i0} \quad (2.21)$$

Celle-ci diffère de la matrice de transition pion-nucléon libre parce que l'énergie E et la masse m se rapportent au système pion-noyau. Cependant à suffisamment haute énergie, le propagateur $(E - \frac{\alpha^2}{2m} + i0)^{-1}$ peut être linéarisé et t ne dépend plus que de la vitesse relative $\mathcal{V} = \sqrt{2E/m}$ identique dans le système pion-nucléon et pion-noyau (voir équation (1.23)). La matrice t est alors identique à la matrice de transition pion-nucléon libre t_{pib} . A moyenne énergie, cette identité n'est vérifiée qu'approximativement;

l'erreur est de l'ordre de grandeur du rapport des masses réduites. Dans le cas de la diffusion α -noyau, ce rapport ne dépasse pas 15% si bien que ϵ sera encore assimilé à $\epsilon_{e,b}$. Malgré cette approximation, l'opérateur potentiel optique n'est pas univoquement déterminé par la connaissance de la structure nucléaire et de l'amplitude pion-nucléon libre. Il s'agit aussi de connaître le prolongement hors-couche de la matrice $\epsilon_{e,b}$. Rappelons que ce problème n'apparaît pas dans la théorie de diffusion multiple de Glauber. Par conséquent les différences entre les prédictions du modèle optique et de la théorie de Glauber vont dépendre du choix du prolongement hors-couche de $\epsilon_{e,b}$.

Reste à déterminer les éléments de matrices de $\mathcal{U}$. A ce stade-là, le traitement diffère pour le cas élastique et inélastique.

a) Diffusion élastique

On utilise le développement en série (2.12) qui fournit :

$$\mathcal{U}_{o_0}(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_{o_0}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}), \quad (2.22a)$$

avec

$$U_{00}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{A-1}{A} \langle \vec{p}' \phi_0 | \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n} t_{j_1} \left[\frac{1-\Lambda_0}{d} t_{j_2} \right] \dots \left[\frac{1-\Lambda_0}{d} t_{j_n} \right] | \vec{p} \phi_0 \rangle. \quad (2.22b)$$

Du fait de la présence du projecteur $1 - \Lambda_0$, ce développement du potentiel optique U_{00} est supposé converger rapidement, si bien que seuls quelques termes seront conservés. Lorsque $1/d$ est remplacé par $G_0^{(1)}$, les deux premiers ordres s'écrivent :

$$U_{00}^{(1)}(\vec{p}', \vec{p}) = (A-1) t(\vec{p}', \vec{p}) \tilde{G}(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (2.23a)$$

$$U_{00}^{(2)}(\vec{p}', \vec{p}) = (A-1)^2 \int d^3x \, t(\vec{p}', \vec{x}) \frac{\tilde{C}(\vec{p}' - \vec{x}, \vec{x} - \vec{p})}{E - \frac{\vec{x}^2}{2m} + i0} t(\vec{x}, \vec{p}), \quad (2.23b)$$

où $\tilde{G}(\vec{q})$ représente le facteur de forme élastique et $\tilde{C}(\vec{q}, \vec{q}')$ la fonction de corrélation définie par

$$\tilde{C}(\vec{q}, \vec{q}') = \sum_{j_0} \tilde{C}^{(2)}_{j_0}(\vec{q}, \vec{q}') - \tilde{C}(\vec{q}) \tilde{C}(\vec{q}') . \quad (2.24)$$

Ainsi en l'absence de toute corrélation dans le noyau, le second ordre du potentiel optique est nul. Il n'en va pas de même pour les termes d'ordre supérieur, du fait de la présence de rediffusions sur le même noyau. Certains auteurs, dont Peshtach et collaborateurs, utilisent un deuxième ordre du potentiel optique avec un propagateur différent de $G^{(2)}$ afin de tenir compte de diffusions élastiques sur les niveaux excités. Dans notre développement, ces diffusions sont contenues dans les termes d'ordre supérieur à 2. Comme notre étude se restreindra au cas où le second ordre est nul et où les termes d'ordre supérieur sont négligés, les deux descriptions seront identiques.

b) Diffusion inélastique

Rappelons d'abord que dans le contexte de ce travail, une diffusion est dite inélastique si après collision, le noyau se retrouve dans un état lié β autre que le fondamental. Contrairement au cas de la diffusion élastique, la série (2.12) pour $\mathcal{U}_{\beta 0}$, $\beta \neq 0$ ne converge pas rapidement, car chaque terme comprend des diffusions élastiques sur le noyau dans l'état excité β . Nous devons donc particulariser l'état final β du noyau dans les équations (2.6) définissant l'opérateur $\mathcal{U}$. Par analogie avec (2.2), nous définissons $\bar{\mathcal{U}}$ tel que

$$U = \bar{U} + U \frac{\Lambda_\beta}{d} \bar{U}, \quad (2.25)$$

où l'opérateur Λ_β représente le projecteur sur l'état β du noyau, c'est-à-dire [†]

$$\Lambda_\beta = |\phi_\beta\rangle\langle\phi_\beta|. \quad (2.26)$$

On vérifie immédiatement que Λ_β commute avec les opérateurs A et d . Le nouvel opérateur $\bar{U}$ est défini par les relations :

$$\bar{U} = \frac{A-1}{A} \sum_j \bar{U}_j A = (A-1) A \bar{U}_j A, \quad (2.27a)$$

$$\bar{U}_j = t_j + t_j \frac{1-\Lambda_0-\Lambda_\beta}{d} \sum_{k \neq j} \bar{U}_k. \quad (2.27b)$$

[†] voir remarque précédent (2.4)

En effet, par une manipulation analogue à celle utilisée pour passer des équations (2.6) à (2.10), on obtient

$$\frac{A}{A-1} \bar{U} = V \left[1 + \frac{1}{d} \left(\frac{A}{A-1} - \Lambda_0 - \Lambda_\beta \right) \bar{U} \right]. \quad (2.28)$$

Puis éliminant V entre (2.10) et (2.28), on retrouve l'équation (2.25) liant U et $\bar{U}$. La résolution de (2.27) puis (2.25) est donc équivalente à celle de (2.6). L'introduction de $\bar{U}$ permet de mettre la matrice de transition (2.18) sous la forme

$$T_{\beta_0}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{A}{A-1} \int d^3x' d^3x \bar{\Psi}_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}') \bar{U}_{\beta_0}(\vec{x}', \vec{x}) \Psi_{0 \vec{p}}^{(+)}(\vec{x}), \quad (2.29)$$

où la fonction d'onde $\bar{\Psi}_{\beta \vec{p}'}^{(-)}$ décrit la diffusion par le potentiel optique $\bar{U}_{\beta \beta}$:

$$\bar{\Psi}_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}') = \frac{e^{-i \vec{p}' \cdot \vec{x}'}}{(2\pi)^{3/2}} + \int d^3x' d^3x'' \bar{\Psi}_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}'') \bar{U}_{\beta \beta}(\vec{x}', \vec{x}'') G_{\beta}^{(+)}(\vec{x}'', \vec{x}'). \quad (2.30)$$

Comme β désigne tout le sous-espace dégénéré d'énergie ϵ_β , cette équation de Lippmann-Schwinger est en fait un système d'équations intégrales couplées. $G_\beta^{(t)}$ représente le propagateur libre du pion lorsque le noyau se trouve dans l'état excité β . Il est relié au propagateur libre $G_0^{(t)}$ par un déplacement en énergie, soit

$$G_\beta^{(t)}(E) \equiv G_0^{(t)}(E - (\epsilon_\beta - \epsilon_0)). \quad (2.31)$$

La diffusion inélastique se calcule donc directement à partir de l'élément de matrice de $\bar{U}_{\beta 0}$ entre des ondes distordues. La distorsion est donnée dans l'état initial par la fonction d'onde $\psi_{0\vec{p}}^{(t)}$ décrivant la diffusion élastique (équation (2.19)), mais dans l'état final par l'onde $\bar{\psi}_{\beta\vec{p}'}^{(t)}$. A noter que $\bar{\psi}_{\beta\vec{p}'}^{(t)}$ ne décrit pas la diffusion élastique d'un pion sur un noyau dans l'état β , puisque $\bar{U}_{\beta\beta}$ ne contient pas le niveau fondamental comme état intermédiaire. En effet par itération de (2.27), on obtient

$$\bar{U}_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{\beta\alpha}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}), \quad (2.32a)$$

$$\bar{U}_{\beta\alpha}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{A-1}{A} \langle \vec{p}' | \phi_\beta | \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n} t_{j_1} \left[\frac{1-\Lambda_0-\Lambda_2}{d} t_{j_2} \right] \dots \left[\frac{1-\Lambda_0-\Lambda_2}{d} t_{j_n} \right] | \vec{p} \phi_\alpha \rangle, \quad (2.32b)$$

avec $\alpha = \beta$ pour le potentiel de distorsion et $\alpha = 0$ pour le potentiel effectuant la transition. Comme dans le cas élastique, le développement (2.32) est supposé converger rapidement et seuls quelques termes seront conservés. Approximant $1/d$ par $G_0^{(4)}$, les deux premiers ordres s'écrivent

$$\bar{U}_{\beta\alpha}^{(1)}(\vec{p}', \vec{p}) = (A-1) t(\vec{p}', \vec{p}) \tilde{G}_{\beta\alpha}(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (2.33a)$$

$$\bar{U}_{\beta\alpha}^{(2)}(\vec{p}', \vec{p}) = (A-1)^2 \int d^3x \tau(\vec{p}', \vec{x}) \frac{\tilde{C}_{\beta\alpha}(\vec{p}' - \vec{x}, \vec{x} - \vec{p})}{E - \frac{x^2}{2m} + i0} t(\vec{x}, \vec{p}), \quad (2.33b)$$

où l'on a posé

$$\tilde{C}_{\beta\alpha}(\vec{q}, \vec{q}') = \tilde{G}_{\beta\alpha}^{(2)}(\vec{q}, \vec{q}') - \tilde{G}_{\beta 0}(\vec{q}) \tilde{G}_{0\alpha}(\vec{q}') - \tilde{G}_{\beta\beta}(\vec{q}) \tilde{G}_{\beta\alpha}(\vec{q}') \quad (2.34)$$

comme généralisation de la fonction de corrélation (2.24). Relevons en particulier que

$$\tilde{C}_{\beta 0}(\vec{q}, 0) = \tilde{C}_{\beta 0}(0, \vec{q}') = 0. \quad (2.35)$$

Enfin, la factorisation (2.29) de la matrice de transition $T_{\beta 0}$ n'est pas la seule qui fasse apparaître l'élément de matrice d'un potentiel optique de transition entre des ondes distordues. Cependant elle a l'avantage de faire apparaître le même opérateur potentiel optique $\bar{U}$ pour effectuer la transition et pour calculer la distorsion dans l'état final. En revanche, cette distorsion ne décrit pas la diffusion élastique du pion sur un noyau dans l'état excité β . Comme elle n'en diffère que par des termes de deuxième ordre ou plus, ce problème ne sera pas abordé ici car nos calculs seront restreints au premier ordre.

2.3 Conséquences de l'invariance par renversement du temps

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les conséquences de l'invariance par renversement du temps sur les symétries des potentiels optiques introduits pour décrire la diffusion pion-noyau. L'invariance par renversement du temps pour le processus élémentaire de diffusion pion-nucléon impose que

$$\langle \vec{x} | V | \vec{x}' \rangle = \langle \vec{x}' | V | \vec{x} \rangle, \quad (2.36)$$

car dans ce travail toute dépendance en spin et isospin est négligée. Il en découle que les éléments de matrice du potentiel d'interaction V_j avec le $j^{\text{ème}}$ nucléon satisfont :

$$\langle \vec{x} \xi | V_j | \vec{x}' \xi' \rangle = \langle \vec{x}' \xi' | V_j | \vec{x} \xi \rangle . \quad (2.37a)$$

$\vec{x}$ représente la position relative du pion par rapport au centre de masse du noyau et $\xi = \{ \xi_j, j = 1 \dots A, \sum_{j=1}^A \xi_j = 0 \}$ l'ensemble des coordonnées intrinsèques du noyau discutées dans l'appendice A. Si le potentiel d'interaction V est local ou si la masse du projectile est négligeable devant celle du nucléon, l'expression (2.37) est diagonale dans les coordonnées ξ_j . Utilisant l'invariance par renversement du temps de l'hamiltonien nucléaire H_A , puis (2.7), (1.2) et (1.1), il vient successivement :

$$\langle \vec{x} \xi | \frac{1}{\alpha} | \vec{x}' \xi' \rangle = \langle \vec{x}' \xi' | \frac{1}{\alpha} | \vec{x} \xi \rangle , \quad (2.37b)$$

$$\langle \vec{x} \xi | \epsilon_j | \vec{x}' \xi' \rangle = \langle \vec{x}' \xi' | \epsilon_j | \vec{x} \xi \rangle , \quad (2.37c)$$

$$\langle \vec{x} \xi | V | \vec{x}' \xi' \rangle = \langle \vec{x}' \xi' | V | \vec{x} \xi \rangle , \quad (2.37d)$$

$$\langle \vec{x} \xi | T | \vec{x}' \xi' \rangle = \langle \vec{x}' \xi' | T | \vec{x} \xi \rangle . \quad (2.37e)$$

Afin d'étudier les éléments de matrice des opérateurs, non pas dans la base des coordonnées $(\vec{x}, \xi)$, mais des $(\vec{p}, \phi_\alpha)$, nous rappelons que α repère tout le sous-espace des fonctions propres de H_A d'énergie ϵ_α fixée. Si I_α désigne le moment cinétique du niveau et M_α sa

projection selon l'axe de quantification, ϕ_α est un vecteur de dimension $(2I_\alpha + 1)$ écrit :

$$\phi_\alpha = \left\{ \left[\phi_\alpha \right]_{M_\alpha} \right\}_{-I_\alpha \leq M_\alpha \leq I_\alpha} \quad (2.38)$$

Ses composantes satisfont la relation de conjugaison complexe

$$\bigotimes_{j=1}^A i \tau_2(j) \left[\phi_\alpha^*(\xi) \right]_{M_\alpha} = (-1)^{I_\alpha - M_\alpha} \left[\phi_\alpha(\xi) \right]_{-M_\alpha} \quad (2.39)$$

où τ_2 désigne la matrice de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La convention de phase a été choisie comme dans Newton p. 453 [Ne]. Avec ces notations, $T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p})$ est une matrice de dimension $(2I_\beta + 1)(2I_\alpha + 1)$ dont les éléments sont donnés par

$$\left[T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_\beta M_\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3x' d^3y d^3z e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}' + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \left[\phi_\beta^*(\xi') \right]_{M_\beta} \langle \vec{x}' \xi' | T | \vec{x} \xi \rangle \left[\phi_\alpha(\xi) \right]_{M_\alpha} \quad (2.40)$$

Combinant (2.37e) et (2.39), on obtient le théorème de réciprocité pour la matrice de transition T ,

$$\left[T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_\beta M_\alpha} = (-1)^{I_\beta - M_\beta - (I_\alpha - M_\alpha)} \left[T_{\alpha\beta}(-\vec{p}', -\vec{p}) \right]_{-M_\alpha - M_\beta} \quad (2.41)$$

qui reflète l'invariance par renversement du temps de la diffusion pion-noyau. Rappelons qu'elle découle de l'invariance par renversement du temps de H_A et de l'interaction élémentaire V . Moyennant (2.36), il est clair que la matrice de diffusion pion-nucléon libre satisfait aussi le théorème de réciprocité :

$$t(\vec{p}', \vec{p}) = t(-\vec{p}', -\vec{p}). \quad (2.42)$$

Montrons encore que les potentiels optiques $\bar{U}$ et $\bar{V}$ satisfont également une relation du type (2.41). En effet, les projecteurs Λ_0 et Λ_β qui apparaissent dans leur construction sont symétriques dans les coordonnées intrinsèques du noyau, puisqu'ils contiennent une sommation sur les orientations du moment cinétique, donc

$$\langle \xi | \Lambda_\alpha | \xi' \rangle = \sum_{M_\alpha = -I_\alpha}^{I_\alpha} \left[\phi_\alpha(\xi) \right]_{M_\alpha} \cdot \left[\phi_\alpha^*(\xi') \right]_{M_\alpha} = \langle \xi' | \Lambda_\alpha | \xi \rangle \quad (2.43)$$

Utilisant cette relation ainsi que (2.37b) et (2.37c), on en déduit à l'aide des définitions (2.6) et (2.27) de $\mathcal{U}$ et $\bar{\mathcal{U}}$ que

$$\langle \vec{x} \rangle | \mathcal{U} | \vec{x}' \rangle = \langle \vec{x}' | \mathcal{U} | \vec{x} \rangle, \quad (2.44a)$$

$$\langle \vec{x} | \bar{\mathcal{U}} | \vec{x}' \rangle = \langle \vec{x}' | \bar{\mathcal{U}} | \vec{x} \rangle, \quad (2.44b)$$

d'où

$$\left[\mathcal{U}_{00}(\vec{x}, \vec{x}') \right]_{M_0' M_0} = (-1)^{M_0' - M_0} \left[\mathcal{U}_{00}(\vec{x}, \vec{x}') \right]_{-M_0 - M_0'}, \quad (2.45a)$$

et

$$\left[\bar{\mathcal{U}}_{\beta\alpha}(\vec{x}, \vec{x}') \right]_{M_\beta M_\alpha} = (-1)^{\frac{I_\beta - M_\beta}{2} - (\frac{I_\alpha - M_\alpha}{2})} \left[\bar{\mathcal{U}}_{\beta\alpha}(\vec{x}, \vec{x}') \right]_{-M_\alpha - M_\beta}. \quad (2.45b)$$

Ces relations sont vérifiées aussi à chaque ordre des développements (2.22) et (2.32). Connaissant les potentiels optiques $\mathcal{U}_{00}$ et $\bar{\mathcal{U}}_{\beta\beta}$, les fonctions d'onde distordue $\psi_{0\vec{p}}^{(G)}$ et $\bar{\psi}_{\beta\vec{p}}^{(-)X}$ sont obtenues en résolvant les équations de Lippmann-Schwinger matricielles (2.19) et (2.30). En y introduisant les relations de symétrie (2.45), on montre que

$$\left[\Psi_{0\vec{p}}^{(-)*}(\vec{x}) \right]_{M_0 M_0} = (-1)^{M_0' - M_0} \left[\Psi_{0-\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \right]_{-M_0' - M_0'} \quad (2.46a)$$

$$\left[\bar{\Psi}_{\beta\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \right]_{M_\beta' M_\beta} = (-1)^{M_\beta' - M_\beta} \left[\bar{\Psi}_{\beta-\vec{p}'}^{(+)}(\vec{x}) \right]_{-M_\beta' - M_\beta'} \quad (2.46b)$$

La fonction d'onde $\Psi_{0\vec{p}}^{(-)}$ [resp. $\bar{\Psi}_{\beta\vec{p}'}^{(-)}$] est donc la transformée par renversement du temps de $\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}$ [resp. $\bar{\Psi}_{\beta\vec{p}'}^{(+)}$]. Alors que $\Psi_{0\vec{p}}^{(+)}$ [resp. $\bar{\Psi}_{\beta\vec{p}'}^{(+)}$] représente une onde plane entrante qui est partiellement absorbée et produit une onde sphérique sortante, $\Psi_{0\vec{p}}^{(-)}$ [resp. $\bar{\Psi}_{\beta\vec{p}'}^{(-)}$] représente une onde sphérique entrante qui est renforcée par la diffusion pour produire une onde plane. Les fonctions d'onde (+) et (-) peuvent s'obtenir par une seule intégration de l'équation de Schrödinger si l'on fait usage de (2.46). Comme le montre notre dérivation, cette propriété découle de l'invariance par renversement du temps des potentiels optiques, qui par ailleurs ne sont pas hermitiens. Enfin, introduisant les relations (2.45) et (2.46) dans l'expression (2.29) pour la matrice de transition $T_{\beta 0}$, on retrouve comme il se doit, le théorème de réciprocité (2.41), même si l'on approxime les potentiels optiques par leurs premiers ordres.

2.4 Mouvement du centre de masse

Rappelons tout d'abord que la matrice de transition T considérée dans ce travail se rapporte au système du centre de masse pion-noyau.

De façon standard la conservation de l'impulsion totale a été sortie du problème. Ainsi le recul du noyau est-il traité correctement pour autant que dans l'équation (2.1) (et les suivantes naturellement !) K soit identifié à l'opérateur d'énergie cinétique relative du pion incident et H_A à l'hamiltonien interne du noyau. En particulier, l'approximation consistant à négliger l'hamiltonien H_A dans le propagateur $1/d$ n'affecte pas le recul du noyau. Les potentiels optiques U et $\bar{U}$ dépendent alors de grandeurs nucléaires mesurables, en ce sens qu'elles apparaissent aussi dans l'analyse d'autres réactions nucléaires. Par exemple, leur premier ordre (équations (2.23a) et (2.33a)) fait apparaître les facteurs de forme $\tilde{g}_{\pi\pi}$, $\tilde{g}_{\pi p}$ et $\tilde{g}_{\pi n}$. Pour les noyaux légers, ceux-ci seront donnés en bonne approximation par les facteurs de forme électromagnétiques correspondants, que l'on peut extraire des expériences de diffusions électron-noyau. De même le second ordre de U et $\bar{U}$ dépend des corrélations de paire dans le noyau. Comme l'ont montré Feshbach et ses collaborateurs [Fe], une partie importante de ces corrélations provient de la contrainte subie par les nucléons, afin que le noyau recule comme un tout (corrélation dite du centre de masse). Par conséquent la contribution aux sections efficaces du second ordre des potentiels optiques ne peut pas être négligée, même si l'on admet que les corrélations dynamiques et de Pauli ne jouent pas de rôle. Bien plus, ce phénomène intervient à tous les ordres, ce qui ne favorise pas la convergence des développements (2.22) et (2.32). Cependant, vu la dégénérescence des états nucléaires intermédiaires (approximation (1.8)), la contribution due au fait que les nucléons doivent reculer ensemble peut se factoriser hors de la matrice de transition pion-noyau T . Pour le démontrer, nous récrivons l'équation de Lippmann-Schwinger (1.9) des canaux couplés :

$$T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = V_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) + \sum_{\gamma \in \text{Sp } H_A} \int d^3x \frac{V_{\beta\gamma}(\vec{p}', \vec{x}) T_{\gamma\alpha}(\vec{x}, \vec{p})}{E - \frac{x^2}{2m} + i0}, \quad (2.47)$$

en remarquant que la sommation dans le membre de droite s'étend à tous les γ appartenant au spectre de valeurs propres de H_A . Par itération de (2.47), on obtient le développement en série de Born de la matrice de transition T , soit

$$T_{\beta\alpha}(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\beta\alpha}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}), \quad (2.48a)$$

$$T_{\beta\alpha}^{(n)}(\vec{p}', \vec{p}) = \sum_{\substack{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \\ \in \text{Sp } H_A}} \int d^3x_1 \dots d^3x_{n-1} V_{\beta\gamma_1}(\vec{p}', \vec{x}_1) \left[\frac{V_{\gamma_1\gamma_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}{E - \frac{x_1^2}{2m} + i0} \right] \dots \left[\frac{V_{\gamma_{n-1}\alpha}(\vec{x}_{n-1}, \vec{p})}{E - \frac{x_{n-1}^2}{2m} + i0} \right]. \quad (2.48b)$$

Lorsque le potentiel pion-nucléon est local et en faisant usage de (1.5b),

(2.49)

$$\sum_{\substack{j_1 \dots j_{n-1} \\ \in Sp H_A}} V_{\beta j_1}(\vec{p}, \vec{x}_1) \dots V_{\gamma_{n-1} \alpha}(\vec{x}_{n-1}, \vec{p}) = \left[V(\vec{p} - \vec{x}_1) \dots V(\vec{x}_{n-1} - \vec{p}) \right] \times$$

$$\times \langle \phi_\beta | \sum_{j_1 \dots j_{n-1}} -i \left\{ (\vec{p} - \vec{x}_1) \cdot \vec{\xi}_{j_1} + \dots + (\vec{x}_{n-1} - \vec{p}) \cdot \vec{\xi}_{j_{n-1}} \right\} | \phi_\alpha \rangle.$$

On suppose ensuite que les fonctions d'onde ϕ_α sont construites à partir des fonctions $\phi_\alpha^{(M)}$ d'un modèle non invariant par translation,

$$H_A^{(M)} |\phi_\alpha^{(M)}\rangle = \epsilon_\alpha |\phi_\alpha^{(M)}\rangle, \quad (2.50)$$

mais satisfaisant :

$$\dagger_\alpha^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \psi_{CM}(\vec{X}) \phi_\alpha(\vec{\xi}_1 \dots \vec{\xi}_A) \quad (2.51)$$

pour $\alpha \in Sp H_A \cap Sp H_A^{(M)}$ et avec ψ_{CM} fonction d'onde du centre de masse dans son état fondamental. La coordonnée $\vec{x}_j$ représente la position du $j^{\text{ème}}$ nucléon à partir d'un centre fixe et $\vec{X} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \vec{x}_j$ celle du centre de masse, si bien que $\vec{\xi}_j = \vec{x}_j - \vec{X}$. Introduisant (2.51) dans (2.49), il vient

(2.50a)

$$\sum_{\substack{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \\ \in \text{Sp } H_A}} V_{\beta \gamma_1}(\vec{p}', \vec{x}_1) \dots V_{\gamma_{n-1} \alpha}(\vec{x}_{n-1}, \vec{p}) = \left[V(\vec{p}' - \vec{x}_1) \dots V(\vec{x}_{n-1} - \vec{p}) \right] \times$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}} e^{-i \left\{ (\vec{p}' - \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_1 + \dots + (\vec{x}_{n-1} - \vec{p}) \cdot \vec{x}_{n-1} \right\}} \langle \phi_{\beta}^{(M)} | \phi_{\alpha}^{(M)} \rangle$$

$$= \sum_{\substack{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \\ \in \text{Sp } H_A^{(M)}}} V_{\beta \gamma_1}^{(M)}(\vec{p}', \vec{x}_1) \dots V_{\gamma_{n-1} \alpha}^{(M)}(\vec{x}_{n-1}, \vec{p}), \quad (2.50b)$$

avec

$$\tilde{G}_{CM}(\vec{q}) = \langle \psi_{CM} | e^{-i \vec{q} \cdot \vec{X}} | \psi_{CM} \rangle \quad (2.51)$$

facteur de forme du centre de masse. A noter que dans (2.50b) les sommations s'étendent à tous les γ appartenant au spectre des valeurs propres de l'hamiltonien du modèle $H_A^{(M)}$. En particulier dans le cas du modèle en couche de l'oscillateur harmonique, les sommations dans (2.50b) comprennent entre autre les états factorisants comme (2.51) mais avec le centre de masse dans un état excité (états dits spurieux !). D'autre part, on a défini :

$$V_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}) = V(\vec{p}' - \vec{p}) \sum_{\beta\alpha}^{\sim} \hat{Q}^{(M)}(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (2.52)$$

signifiant que les éléments de matrice sont pris entre les fonctions du modèle $\phi_{\alpha}^{(M)}$. Constatons que chaque terme de la série de Born (2.48) factorise le mouvement du centre de masse et qu'en définitive la matrice de transition pion-noyau peut s'écrire

$$T_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}) = \hat{Q}_{(M)}^{-1}(\vec{p}' - \vec{p}) T_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}), \quad (2.53)$$

avec

$$(2.54)$$

$$T_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}) = V_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}) + \sum_{Y \in Sp H_A^{(M)}} \int d^3x \frac{V_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{p}', \vec{x}) T_{\gamma\alpha}^{(M)}(\vec{x}, \vec{p})}{E - \frac{x^2}{2m} + i0}.$$

Bien que nous ayons établi cette factorisation du mouvement du centre de masse en utilisant un potentiel pion-nucléon local, nous laissons le soin au lecteur de montrer que le résultat reste valable dans le cas général. En revanche, l'approximation, consistant à considérer

les états nucléaires intermédiaires comme dégénérés, est nécessaire à cette factorisation. De plus, les fonctions d'onde du modèle sont supposées factorisables selon (2.51), ce qui n'est rigoureusement exact que pour le modèle en couche de l'oscillateur harmonique.

L'équation de Lippmann-Schwinger (2.54) pour la matrice de transition de modèle $T_{\beta\alpha}^{(M)}$ est analogue à celle de départ (2.47). Ainsi tous les résultats des paragraphes précédents restent-ils valables si l'on fait les remplacements

$$\xi = \left\{ \vec{\xi}_j ; \sum_{j=1}^A \vec{\xi}_j = 0 \right\} \longrightarrow \left\{ \vec{x}_1 \dots \vec{x}_A \right\}, \quad (2.55a)$$

$$d\xi = \delta^3(\sum_j \vec{\xi}_j) d^3\xi_1 \dots d^3\xi_A \longrightarrow d^3x_1 \dots d^3x_A, \quad (2.55b)$$

$$\phi_\alpha(\xi) \longrightarrow \phi_\alpha^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A), \quad (2.55c)$$

et que l'on indice toutes les grandeurs pion-noyau par la lettre M. Les potentiels optiques $U^{(M)}$ et $\bar{U}^{(M)}$ dépendent de grandeurs nucléaires calculées à partir des fonctions d'onde $\phi_\alpha^{(M)}$ du modèle. Leur premier ordre fait apparaître les facteurs de forme $\tilde{S}_{00}^{(M)}$, $\tilde{S}_{\mathcal{M}}^{(M)}$ et $\tilde{S}_{\beta 0}^{(M)}$ que l'on peut ajuster de telle sorte qu'ils reproduisent les expériences de diffusion électron-noyau. Leur second ordre dépend des fonctions de corrélation de paire $\tilde{C}^{(M)}$, $\tilde{C}_{\mathcal{M}}^{(M)}$ et $\tilde{C}_{\beta 0}^{(M)}$. Dans le cadre du modèle en couche de l'oscillateur harmonique, ces fonctions ne sont non nulles que par la présence des corrélations de Pauli dues à l'antisymétrisation des fonctions d'onde et que l'on peut raisonnablement négliger. La diffusion pion-noyau sera calculée dès lors à partir des potentiels optiques de modèle du premier ordre. L'amplitude de diffusion finale sera obtenue par la relation (2.53). Il est cepen-

dant utile de comparer les résultats obtenus par cette méthode à ceux provenant d'un calcul au premier ordre des potentiels optiques (2.22) et (2.32). Dans le second cas, en effet, les corrélations du centre de masse sont négligées. Les figures 2, 3 et 4 montrent que ces corrélations jouent un rôle important pour un noyau léger tel que l'hélium, alors qu'elles deviennent insignifiantes à partir de l'oxygène.

CHAPITRE 3 : COMPARAISONS ENTRE LA THEORIE DE GLAUBER ET CELLE DU POTENTIEL OPTIQUE

Pour terminer ce travail, nous allons comparer les différentes expressions obtenues dans les chapitres précédents. Aussi, cherchons-nous à traiter de la même manière les approximations communes aux deux approches. Tout d'abord, on admettra que les états nucléaires intermédiaires sont dégénérés (équation (1.8)). Notons que cette approximation est intrinsèque à la théorie de Glauber, mais qu'elle peut, en principe, être évitée dans la construction du potentiel optique au premier ordre. D'autre part, on factorisera le mouvement du centre de masse devant l'amplitude de diffusion. Comme nous l'avons vu, cette factorisation est toujours possible pourvu que le noyau puisse être décrit par le modèle en couche de l'oscillateur harmonique. L'effet des corrélations du centre de masse est ainsi incorporé dans les résultats. Rappelons qu'il ne peut pas être négligé dans le cas de noyau aussi léger que l'hélium.

Dans ces conditions, nous pouvons toujours représenter l'amplitude de diffusion pion-noyau pour la transition de l'état α à β sous la forme :

$$F_{\beta\alpha}(\vec{q}) = \tilde{g}_{CM}^{-1}(\vec{q}) \frac{iK}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \Gamma_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{b}), \quad (3.1)$$

où $\Gamma_{\beta\alpha}^{(M)}(\vec{b})$ est la fonction de profil associée à cette transition. La représentation (3.1) en paramètre d'impact est adaptée à notre étude pour plusieurs raisons :

- a) la diffusion π -noyau autour de la résonance (3,3) fait intervenir un assez grand nombre d'ondes partielles dont aucune ne domine [Be] ,
- b) la théorie de diffusion multiple de Glauber et les approximations eikonales prédisent directement une fonction de profil.

3.1 Diffusion élastique

Notre but étant de comparer $\Gamma^{(M)}(b)$ à la fonction de profil issue du potentiel optique discuté dans le chapitre 2, nous l'écrivons sous la forme

$$\Gamma^{(M)}(b) = \frac{A}{A-1} \left(1 - e^{i \chi^{(M)}(b)} \right). \quad (3.2)$$

A noter la présence du facteur $1/(A-1)$ qui implique que $\chi^{(M)}(b)$ n'est pas assimilable au déphasage en paramètre d'impact habituellement défini dans la littérature (voir par exemple Wilkin [wi]). Rappelons que la théorie de Glauber fournit (1.41) :

$$\Gamma_G^{(M)}(b) = 1 - \langle \phi_0^{(M)} | \prod_{j=1}^A (1 - \gamma(b - \vec{s}_j)) | \phi_0^{(M)} \rangle, \quad (3.3)$$

où γ désigne la fonction de profil pion-nucléon et $\vec{s}_j$ le paramètre d'impact du $j^{\text{ème}}$ nucléon. L'évaluation de (3.3) nécessite la connaissance de la densité de modèle à A points $\varrho^{(A)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A)$. Dans le cadre du modèle en couche de l'oscillateur harmonique, la fonction de

profil $\Gamma_G^{(M)}(\vec{b})$ peut se calculer aisément pour les noyaux légers (voir appendice B). Or dans ce paragraphe, il s'agit de la mettre sous la forme (3.2). Pour ce faire, on utilise la même technique que celle proposée par Glauber dans son article original [G1] et qui nous conduit au développement :

$$i X_G^{(M)}(\vec{b}) = -(A-1) \int d^3x_1 \gamma(\vec{b}-\vec{s}_1) \mathcal{G}(\vec{x}_1) \quad (3.4a)$$

$$+ \frac{1}{2}(A-1)^2 \int d^3x_1 d^3x_2 \gamma(\vec{b}-\vec{s}_1) \gamma(\vec{b}-\vec{s}_2) C^{(M)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (3.4b)$$

$$+ \dots$$

où $C^{(M)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ représente la transformée de Fourier de la fonction de corrélation (2.24)

$$C^{(M)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{q}_1 d^3\vec{q}_2 e^{i(\vec{q}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{x}_2)} \tilde{C}^{(M)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \quad (3.5a)$$

$$= \int_{00}^{(2)} \mathcal{G}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \mathcal{G}(\vec{x}_1) \mathcal{G}(\vec{x}_2). \quad (3.5b)$$

Contrairement à la "formule" de Glauber (3.3), le développement (3.4) du déphasage $X_G^{(M)}(\vec{b})$ fait apparaître les mêmes grandeurs nucléaires "mesurables" que celles intervenant lors de la construction du potentiel optique $U_{oo}^{(M)}$. Bien plus, le premier terme (3.4a) peut être interprété comme le déphasage eikonal $X_E^{(M)}(\vec{b})$ d'un potentiel

optique, c'est-à-dire :

$$i\chi_E^{(M)}(\vec{b}) = -\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dz U_E^{(M)}(\vec{b}, z), \quad (3.6)$$

avec

$$U_E^{(M)}(\vec{x}) = \int d^3q e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} U_E^{(M)}(\vec{q}), \quad (3.7)$$

et

$$U_E^{(M)}(\vec{q}) = (A-1) \left[\frac{-iv}{(2\pi)^3} \int d^3b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \chi(\vec{b}) \right] \tilde{\mathcal{M}}(\vec{q}), \quad (3.8)$$

où v désigne la vitesse du pion incident. Dans (3.8), on reconnaît entre crochets la représentation en paramètre d'impact de la matrice de transition pion-nucléon libre, si bien que sur couche d'énergie $U_E^{(M)}$ s'identifie au premier ordre du potentiel optique $U_{00}^{(M)}$. De plus, cette identité reste vraie hors-couche si l'on suppose que t n'est fonction que du transfert d'impulsion.

Poursuivant notre étude du développement (3.4) de $\chi_G^{(M)}(\vec{b})$, nous remarquons que le second terme (3.4b) ne dépend que de la fonction de corrélation $C^{(M)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Comme dans le développement du potentiel optique $U_{00}^{(M)}$, sa contribution est faible. Il en va de même pour les termes suivants de (3.4). Leur importance pour la diffusion α -noyau

à des énergies voisines de la résonance (3,3) est illustrée dans les figures 5, 6 et 7. On y compare les sections efficaces différentielles calculées de trois manières différentes :

- a) par la "formule" de Glauber (1.41),
- b) à partir du déphasage eikonal $\chi_E^{(M)}(\vec{b})$ (3.6), (3.9)
- c) par intégration numérique de l'équation de Lippmann-Schwinger (2.19) avec le potentiel optique $U_E^{(M)}$.

Trois noyaux pair-pair, à savoir ^4He , ^{12}C et ^{16}O sont considérés. Leur structure nucléaire est représentée par le modèle en couche de l'oscillateur harmonique. La factorisation du mouvement du centre de masse est ainsi exacte avec

$$\tilde{g}_{cm}(\vec{q}) = e^{-\frac{1}{A} \left(\frac{qR}{2} \right)^2} \quad (3.10)$$

Les valeurs du paramètre de rayon sont tirées des expériences de diffusion d'électrons, soit

	^4He	^{12}C	^{16}O	
R [fm]	1.37	1.58	1.71	(3.11)
référence	[FC]	[Go]	[Go]	

Nous avons choisi de paramétrer la matrice de transition α -nucléon par la forme

$$t(\vec{q}) = \frac{-i v}{16 \pi^3} v(1-i\beta) e^{-\frac{1}{2} a q^2} \quad (3.12)$$

Celle-ci est typique de la diffusion à haute énergie; pour des énergies voisines de la résonance (3,3), elle prédit encore les sections efficaces différentielles vers l'avant jusqu'à des angles d'environ 90° . Les valeurs utilisées des paramètres γ , ϑ et α sont celles citées par Locher, Steinmann et Straumann [LS] (table 1, colonnes (a)). Avec cette paramétrisation et le modèle en couche de l'oscillateur harmonique, les fonctions de profil $\Gamma_G^{(M)}(\vec{b})$,

$$\Gamma_E^{(M)}(\vec{b}) = \frac{A}{A-1} \left(1 - e^{i X_E^{(M)}(\vec{b})} \right), \quad (3.13)$$

ainsi que le potentiel optique $U_E^{(M)}$ sont calculés analytiquement. Pour leurs expressions explicites, le lecteur est renvoyé aux appendices B et C. Les amplitudes de diffusion $\mathcal{R}$ -noyau s'obtiennent ensuite numériquement soit par transformée de Fourier-Bessel pour la "formule" de Glauber ou l'approximation eikonale, soit par intégration d'une équation de Schrödinger pour le potentiel optique. A noter que ces deux types de calculs numériques peuvent être effectués actuellement sur ordinateur en des temps comparables.

L'examen des figures 5 à 7 nous révèle que les trois approximations (3.9) conduisent à des résultats similaires dans le domaine angulaire s'étendant jusqu'à 90° . Cela signifie que l'approximation eikonale de $U_E^{(M)}$, autrement dit le premier terme du développement (3.4) est une bonne approximation :

1^o) de la "formule" de Glauber,

2^o) de la solution exacte de l'équation de Lippmann-Schwinger (2.19)

avec $U_E^{(M)}$.

Le dernier de ces points est vérifié surtout parce que le potentiel optique construit à partir de (3.12) est doux en fonction de la position; de plus sa partie imaginaire ainsi que son rayon quadratique moyen sont grands. Nous pensons que les différences entre les résultats des trois approximations (3.9) ne sont pas trop sensibles au choix de l'extension hors-couche pour la matrice de transition pion-nucléon. Mais une étude ultérieure est nécessaire pour confirmer ces dires.

A titre indicatif, nous avons comparé nos courbes théoriques avec les mesures expérimentales actuellement disponibles [Bi] , [St] , [BV] . Pour ^{12}C et ^{16}O , l'accord entre la théorie et l'expérience est raisonnablement bon. Cependant la position du premier minimum est prédite à des transfert d'impulsion trop petits. Cela amène à penser que le paramètre de rayon R du modèle en couche de l'oscillateur harmonique devrait être différent dans la diffusion d'électrons et de pions. Mais il semble bien que cette interprétation soit fallacieuse. En effet, il a été montré que si l'on utilise un potentiel optique seulement pour calculer les déphasages d'ordre élevé et que l'on ajuste ceux d'ordre plus bas, la valeur de ce paramètre R ne diffère pas dans la diffusion $\alpha^- - ^{12}\text{C}$ et $e^- - ^{12}\text{C}$ [BG] . L'application de cette technique d'analyse à d'autres noyaux est encore nécessaire afin de tester sa validité. Pour ^4He , l'accord entre la théorie et l'expérience est très pauvre. Comme on peut le voir à partir des données expérimentales, le premier minimum dans la section efficace différentielle est très proche du minimum de l'amplitude de diffusion α^- -nucléon (environ 90°). On s'attend donc à ce que les résultats soient très sensibles à la paramétrisation de la matrice de transition $\mathcal{E}$. Comme notre choix (3.12) n'est pas susceptible de reproduire la diffusion α^- -nucléon au-delà de 90° , il en va de même pour $\alpha^- - ^4\text{He}$.

Puis nous avons reporté dans la table 1 les valeurs de la section efficace totale et de la partie réelle de l'amplitude à 0° correspondant

aux figures 5 à 7. En plus des résultats des trois approximations (3.9), nous y avons aussi inscrit ceux de la "limite optique" de Glauber, dont la fonction de profil s'écrit

$$\Gamma_0^{(n)}(b) = 1 - e^{i \frac{A}{A-1} \chi_E^{(n)}(b)} \quad (3.14)$$

On y constate que la section efficace totale n'est pas très sensible aux différentes approximations. En revanche, la partie réelle de l'amplitude à 0^0 , prédite par la résolution de l'équation de Lippman-Schwinger, diffère passablement de celle obtenue par les autres approximations. Cette différence provient essentiellement du fait que la théorie de Glauber et les approximations eikonales associées donnent lieu à une amplitude de diffusion α -noyau purement imaginaire à l'énergie de la résonance (3,3) α -nucléon [LS]. L'emploi des potentiels optiques au contraire permet un déplacement en énergie du zéro de la partie réelle de l'amplitude à 0^0 .

Enfin, soulignons encore que les différences entre les prédictions des diverses approximations (3.9) sont du même ordre de grandeur que celles des figures 2 à 4. Ceci justifie a posteriori notre soin à traiter de la même manière le mouvement du centre de masse tout au long de cette étude.

3.2 Diffusion inélastique

Nous nous proposons d'appliquer ici les résultats du chapitre 2 au calcul de l'excitation des états liés d'un noyau par des α . Au premier ordre des potentiels optiques $\mathcal{U}^{(n)}$ et $\bar{\mathcal{U}}^{(n)}$, la matrice de tran-

sition s'écrit :

$$\left[T_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_\beta M_0} = \sum_{M_0}^{N-1} (\vec{p}' - \vec{p}) A \int d^3x' d^3x \sum_{M_0' M_0''} \left[\gamma_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}') \right]_{M_\beta M_0'} \frac{1}{A-1} \left[\overline{U}_{\beta 0}^{(M,1)}(\vec{x}', \vec{x}) \right]_{M_0' M_0''} \left[\gamma_{0 \vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \right]_{M_0'' M_0}, \quad (3.15)$$

où I_0 (resp. I_β) désigne le moment cinétique de l'état initial (resp. final) et M_0 (resp. M_β) sa projection selon l'axe de quantification. Les fonctions d'onde $\gamma_{0 \vec{p}}^{(+)}$ et $\gamma_{\beta \vec{p}'}^{(-)}$ satisfont les équations matricielles :

$$\left[\gamma_{0 \vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \right]_{M_0 M_0'} = \frac{e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{M_0 M_0'} + \int d^3x' d^3x'' G_0^{(+)}(\vec{x}, \vec{x}') \sum_{M_0''} \left[U_{00}^{(M,1)}(\vec{x}', \vec{x}'') \right]_{M_0 M_0''} \left[\gamma_{0 \vec{p}}^{(+)}(\vec{x}'') \right]_{M_0'' M_0'}, \quad (3.16a)$$

$$\left[\gamma_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \right]_{M_\beta M_\beta'} = \frac{e^{-i \vec{p}' \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \delta_{M_\beta M_\beta'} + \int d^3x' d^3x'' \sum_{M_\beta''} \left[\gamma_{\beta \vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}') \right]_{M_\beta M_\beta''} \left[\overline{U}_{\beta \beta}^{(M,1)}(\vec{x}', \vec{x}'') \right]_{M_\beta'' M_\beta'} G_\beta^{(+)}(\vec{x}'', \vec{x}). \quad (3.16b)$$

Enfin les éléments de matrice des potentiels optiques sont donnés dans l'espace des impulsions par

$$\left[U_{00}^{(M,1)}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_0 M_0'} = (A-1) t(\vec{p}', \vec{p}) \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{00}^{(M)}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_0 M_0'}, \quad (3.17a)$$

$$\left[\overline{U}_{\beta\beta}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_\beta M_\beta'} = (A-1) \, t(\vec{p}', \vec{p}) \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\beta\beta}(\vec{p}' - \vec{p}) \right]_{M_\beta M_\beta'} \quad (3.17b)$$

$$\left[\overline{U}_{\beta 0}(\vec{p}', \vec{p}) \right]_{M_\beta M_0} = (A-1) \, t(\vec{p}', \vec{p}) \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\beta 0}(\vec{p}' - \vec{p}) \right]_{M_\beta M_0} \quad (3.17c)$$

Ainsi en choisissant un modèle nucléaire et un prolongement hors-couche de la matrice de transition pion-nucléon t , les équations (3.17), (3.16) puis (3.15) permettent de calculer les sections efficaces de transition pion-noyau de l'état fondamental à un état excité β . Dans ce travail, nous estimerons (3.15) à l'aide d'ondes distordues calculées en approximation eikonale. Comme dans le paragraphe précédent pour la diffusion élastique, nous considérons seulement le cas où le moment cinétique de l'état fondamental du noyau est nul. Cela implique que l'équation (3.16a) est en fait une équation de Lippmann-Schwinger à un canal, puisque M_0 , M_0' et M_0'' ne peuvent prendre que la valeur 0. Nous supposons ensuite que la distorsion dans l'état final provient essentiellement des termes diagonaux de $\mathcal{Y}_{\beta\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x})$ et que ceux-ci sont bien approximés par la distorsion dans l'état initial, c'est-à-dire que

$$\left[\mathcal{Y}_{\beta\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \right]_{M_\beta M_\beta'} \approx \delta_{M_\beta M_\beta'} \mathcal{Y}_{0\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \quad (3.18)$$

Dans ces conditions, la matrice de transition (3.15) s'écrit :

$$\left[T_{\beta_0}^{(\vec{p}', \vec{p})} \right]_{M_\beta} = \hat{Q}_{CH}^{-1}(\vec{p}', \vec{p}) A \int d^3x \, \psi_{0\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \frac{1}{A-1} \left[\overline{U}_{\beta_0}^{(M,1)}(\vec{x}) \right]_{M_\beta} \psi_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}), \quad (3.19)$$

où nous avons choisi un prolongement hors-couche en transfert d'impulsion pour la matrice $\hat{t}$, si bien que les potentiels optiques (3.17) sont locaux. L'étape suivante consiste à remplacer dans (3.19) les ondes distordues par leur approximation eikonale, i.e.

$$\psi_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \longrightarrow \hat{\psi}_{0\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\vec{x}} dz' U_{00}^{(M,1)}(\vec{b}, z')} \quad (3.20a)$$

$$\psi_{0\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) \longrightarrow \hat{\psi}_{0\vec{p}'}^{(-)*}(\vec{x}) = e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x} - \frac{i}{v} \int_z^{\infty} dz' U_{00}^{(M,1)}(\vec{b}, z')} \quad (3.20b)$$

Avec ces approximations, on obtient une représentation en paramètre d'impact de l'amplitude de diffusion $F_{\beta_0}(\vec{q})$ du type (3.1). La fonction de profil associée est donnée par

$$\left[\Gamma_{\beta_0}^{(M)}(\vec{b}) \right]_{M_\beta} = A e^{iX_E^{(M)}(\vec{b})} \int d^2z \left[\mathcal{Q}^{(M)}(\vec{z}, z) \right]_{M_\beta} \chi(\vec{b} - \vec{z}), \quad (3.21)$$

où $\chi_E^{(M)}(b)$ représente le déphasage eikonal (3.6) décrivant la diffusion élastique et χ la fonction de profil de la diffusion pion-nucléon libre. La densité nucléaire $\rho_{\beta 0}(\vec{x})$ est reliée au facteur de forme de transition $S_{\beta}^{(M)}(q)$ par

$$\left[S_{\beta 0}^{(M)}(\vec{x}) \right]_{M_{\beta}} = \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} q^2 dq j_{I_{\beta}}(qr) S_{\beta}^{(M)}(q) \right\} \sqrt{\frac{4\pi}{2I_{\beta}+1}} Y_{I_{\beta}}^{(M)}(\hat{x}). \quad (3.22)$$

Nous choisissons la paramétrisation :

$$S_{\beta}(q) = B_{\beta} q^{I_{\beta}} \left\{ 1 - \gamma_{\beta} \left(\frac{q R_{\beta}}{2} \right)^2 \right\} e^{-\left(\frac{\gamma_{\beta} R_{\beta}}{2} \right)^2}, \quad (3.23)$$

qui pour les noyaux légers contient les prédictions de nombreux modèles nucléaires. Les valeurs de γ_{β} , B_{β} et R_{β} fournies par quelques modèles nucléaires habituellement utilisés pour la diffusion par ^{12}C sont reportées sur la table 2. Citons de plus la relation entre le paramètre B_{β} et la largeur électromagnétique Γ_{β} du niveau β :

$$B_{\beta}^2 = \frac{1}{A^2} \frac{2I_{\beta}(2I_{\beta}+1)}{I_{\beta}+1} \left(\frac{\hbar c}{e^2} \right) \left(\frac{\hbar c}{\epsilon_{\beta} - \epsilon_0} \right)^{2I_{\beta}+1} \left(\frac{\Gamma_{\beta}}{\hbar c} \right). \quad (3.24)$$

La paramétrisation (3.23) jointe à celle de $t(\vec{q})$ (3.12) permet le calcul analytique de la fonction de profil (3.21). Les expressions explicites sont dérivées dans l'appendice C. L'excitation des états liés d'un noyau peut ainsi s'obtenir numériquement sur ordinateur en des temps comparables à ceux nécessaires au calcul de la diffusion élastique.

A titre d'exemple, nous avons calculé les sections efficaces différentielles pour l'excitation des niveaux $2^+(4.4 \text{ MeV})$ et $3^-(9.6 \text{ MeV})$ du ^{12}C par des pions pour les trois modèles nucléaires suivants:

- 1) Modèle "électronique" qui découle d'un ajustement phénoménologique aux expériences de diffusion par des électrons [RW] .
- 2) Modèle de vibration [Fr] . Il prédit $R_{2^+} = R_{3^-} = R$ ainsi que les valeurs de γ_{2^+} et γ_{3^-} . Aussi B_{2^+} et B_{3^-} sont-ils les seuls paramètres libres de ce modèle. Ils ont été choisis de telle sorte qu'ils reproduisent les expériences de diffusion d'électrons à faible transfert d'impulsion.
- 3) Modèle de particule-trou de Gillet [GW] dont les paramètres ont été tirés du travail de Lee et Mc Manus [LM] .

Les résultats sont reportés sur les figures 8 et 9. On y constate qu'ils ne sont pas suffisamment sensibles au choix des modèles nucléaires pour que l'on puisse choisir définitivement parmi eux. Cependant, le facteur de forme de transition qui ajuste les expériences de diffusion d'électrons reproduit également la diffusion inélastique $\pi - ^{12}\text{C}$ de manière satisfaisante. Le processus de diffusion est plutôt complètement dominé par la distorsion élastique comme le montre les fortes oscillations observées. Or dans le cadre de notre étude, cette distorsion est calculée en faisant usage de plusieurs approximations :

- 1) La dépendance en moment cinétique de la distorsion dans l'état final est négligée (équation (3.18)).
- 2) La fonction d'onde $\gamma_{0\vec{p}}^{(1)}$ est remplacée par son approximation eikonale (équation (3.20)).

Il s'agit donc de s'assurer de la validité de ces deux approximations. En faveur de la seconde, nous savons que les sections efficaces diffé-

rentielles de diffusion élastique α -noyau prédites par un potentiel optique ou son approximation eikonale coïncident vers l'avant (figures 5 à 7). On peut donc espérer qu'il en va de même pour l'excitation des états liés. En revanche, l'approximation (3.18) consistant à négliger toute dépendance en moment cinétique de la distorsion pourrait se révéler peu justifiée. Comme illustration, nous avons comparé sur la figure 10 les prédictions de la "formule" de Glauber (1.41) avec les résultats des approximations utilisées dans ce paragraphe. L'exemple choisi se rapporte à l'excitation du niveau $2^+(4.4 \text{ MeV})$ du ^{12}C par des α de 150 MeV. Ce niveau est décrit par le modèle en couche de l'oscillateur harmonique avec excitation d'un nucléon de l'état $p_{3/2}$ à $p_{1/2}$. Ce modèle a l'avantage de permettre un calcul à la Glauber (voir appendice B). Par contre il prédit un facteur de forme de transition environ trois fois plus petit que celui issu des mesures d'électrons (voir table 2) ce qui reflète le caractère hautement collectif du niveau 2^+ du ^{12}C . En conséquence, les sections efficaces différentielles de la figure 10 ont été renormalisées par un facteur $[(B_{2^+})_{\text{électrons}} / (B_{2^+})_{\text{modèle}}]^2 \approx 9$. La comparaison des deux types de calculs montre qu'ils conduisent à des résultats différents aussi bien vers l'arrière que vers l'avant. Or ceux-ci diffèrent essentiellement [ML] par le fait que la théorie de Glauber ne nécessite pas la première des approximations (3.25). En conséquence, la dépendance en moment cinétique de la distorsion dans l'état final joue un rôle non négligeable même vers l'avant. Dans des calculs plus détaillés, il s'agira d'en tenir compte aussi bien que d'introduire la dépendance en spin de la matrice de transition pion-nucléon.

3.3 Remarques finales

Il ressort de cette étude que les données expérimentales actuellement disponibles sur la diffusion α -noyau à des énergies voisines de la résonance (3,3) sont assez bien reproduites par la "formule" de Glauber ou l'utilisation d'un potentiel optique local. En outre, ces deux méthodes de calcul conduisent à des sections efficaces différentielles élastiques pratiquement identiques dans un domaine angulaire s'étendant jusqu'à 90° . Notre étude a montré que cette coïncidence n'est pas fortuite; en effet, la théorie de Glauber et celle du potentiel optique peuvent être considérées comme des approximations des mêmes équations potentielles de diffusion multiple. Lors des comparaisons dans le cadre d'un modèle nucléaire, il s'agit cependant de traiter de façon identique l'influence du mouvement du centre de masse; ce n'est qu'à cette condition que les deux théories fournissent des résultats semblables pour les noyaux très légers.

Mais la "formule" de Glauber et les potentiels optiques au premier ordre ont une caractéristique commune primordiale : celle de faire apparaître la matrice de transition pion-nucléon libre $t_{p;b}$. Plus précisément, la seconde méthode nécessite la connaissance des valeurs hors-couche de $t_{0;b}$. Or en utilisant une paramétrisation gaussienne en transfert d'impulsion, nous avons minimisé l'influence de ces valeurs. Dans le cas contraire, il faut s'attendre à des différences quantitativement bien plus grandes [GP].

Enfin, une comparaison précise des résultats de ces deux méthodes de calcul avec l'expérience révèle qu'il est encore nécessaire de les

perfectionner. Or la théorie de diffusion multiple de Glauber, par son caractère phénoménologique, n'est pas pour l'instant susceptible d'améliorations. En revanche, la construction des potentiels optiques l'est. Il se révèle donc que cette dernière méthode devrait permettre une analyse plus détaillée de la diffusion α -noyau.

APPENDICE A : DESCRIPTION DU NOYAU

Cet appendice est consacré au rappel de quelques propriétés des fonctions d'onde nucléaires et des matrices densité associées. Nous désignons par $\mathcal{J} = \{ \vec{\xi}_1 \dots \vec{\xi}_A \mid \sum_{j=1}^A \vec{\xi}_j = 0 \}$ l'ensemble des coordonnées des A nucléons par rapport au centre de masse du noyau (coordonnées intrinsèques) et par $\phi_\alpha(\xi)$ la fonction d'onde nucléaire d'énergie ϵ_α . L'indice α décrit ici l'ensemble des nombres quantiques repérant le sous-espace des états propres (lié ou du continu) d'énergie ϵ_α soit :

$$(H_A - \epsilon_\alpha) \phi_\alpha(\xi) = 0, \quad (\text{A.1})$$

où H_A représente l'hamiltonien interne du noyau. Par convention, l'indice 0 se rapportera à l'état fondamental du noyau. Etant donné que les nucléons sont des fermions, les fonctions d'onde jouissent des propriétés suivantes :

$$\text{a) } \phi_\alpha \text{ complètement antisymétrique,} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \int d\xi \phi_\beta^*(\xi) \phi_\alpha(\xi) = \delta_{\beta\alpha}, \\ \sum_\alpha \phi_\alpha(\xi') \phi_\alpha(\xi) = A(\xi', \xi). \end{array} \right. \quad (\text{A.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_\alpha \phi_\alpha(\xi') \phi_\alpha(\xi) = A(\xi', \xi). \end{array} \right. \quad (\text{A.3b})$$

Les propriétés (A.3) expriment le fait que les fonctions d'onde nucléaires ϕ_α forment un système orthonormé complet dans l'espace des fonctions d'onde complètement antisymétriques. En écrivant (A.3), les

conventions suivantes ont été utilisées :

$$d\xi = d\xi_1^3 \dots d\xi_A^3 \delta^{(3)}\left(\frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \xi_j^3\right), \quad (\text{A.4})$$

et

$$\int d\xi' f(\xi') A(\xi, \xi') = \text{partie complètement} \quad (\text{A.5})$$

antisymétrique de $f(\xi)$.

Densités à n points :

La matrice densité à n points est définie à partir des fonctions d'onde ϕ_α par la relation :

$$\sum_{\beta\alpha}^{(n)} (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \int d\xi \phi_\beta^*(\xi) \frac{(A-n)!}{A!} \sum_{j_1 \dots j_n} \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \xi_{j_1}) \dots \delta^{(3)}(\vec{x}_n - \xi_{j_n}) \phi_\alpha(\xi), \quad (\text{A.6})$$

où la somme primée signifie qu'elle est restreinte à tous les indices différents. On vérifie facilement que la matrice $\underline{\mathcal{Q}}^{(n)} = \{\mathcal{Q}_{\beta\alpha}^{(n)}\}$ jouit des propriétés suivantes :

a) Hermiticité et symétrie des $\underline{\mathcal{Q}}^{(n)}$:

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(n)\dagger}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n), \quad (\text{A.7a})$$

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_j) = \underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n), \quad (\text{A.7b})$$

si $\{j_1 \dots j_n\}$ est une permutation de $\{1 \dots n\}$.

b) Relations de récurrence :

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = 0 \quad \text{pour} \quad n > A, \quad (\text{A.8a})$$

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(n-1)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{n-1}) = \int d^3x_n \underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \quad \text{pour} \quad n \leq A. \quad (\text{A.8b})$$

c) Normalisation :

$$\int d^3x_1 \dots d^3x_n \underline{\mathcal{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = \delta_{\beta\alpha} \quad \text{pour} \quad n \leq A. \quad (\text{A.9})$$

d) Cas particuliers :

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(1)}_{\beta\alpha}(\vec{x}) \equiv \underline{\mathcal{Q}}_{\beta\alpha}(\vec{x}) = \int d\xi \phi_{\beta}^*(\xi) \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{\xi}_j) \phi_{\alpha}(\xi), \quad (\text{A.10a})$$

$$\underline{\mathcal{Q}}^{(A)}_{\beta\alpha}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \phi_{\beta}^*(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) \delta^{(3)}\left(\frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \vec{x}_j\right) \phi_{\alpha}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A). \quad (\text{A.10b})$$

e) Réduction du produit de $\underline{Q}$:

$$\underline{Q}(\vec{x}_1) \underline{Q}(\vec{x}_2) = \frac{A-1}{A} \underline{Q}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \frac{1}{A} \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \underline{Q}(\vec{x}_1), \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{aligned} \underline{Q}(\vec{x}_1) \underline{Q}(\vec{x}_2) \underline{Q}(\vec{x}_3) &= \frac{(A-1)(A-2)}{A^2} \underline{Q}^{(3)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \\ &+ \frac{A-1}{A^2} \left\{ \delta^{(3)}(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \underline{Q}^{(2)}(\vec{x}_1, \vec{x}_3) + \delta^{(3)}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \underline{Q}^{(2)}(\vec{x}_2, \vec{x}_1) + \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \underline{Q}^{(2)}(\vec{x}_3, \vec{x}_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{A^2} \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta^{(2)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \underline{Q}(\vec{x}_1). \end{aligned} \quad (\text{A.11b})$$

f) Relation de commutation :

$$\left[\underline{Q}^{(m)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_m), \underline{Q}^{(n)}(\vec{x}'_1 \dots \vec{x}'_n) \right] = 0. \quad (\text{A.12})$$

g) Elément de matrice d'un opérateur à n corps :

$$\mathcal{O} = \sum_{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n} \mathcal{O}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n), \quad (\text{A.13a})$$

$$\langle \phi_\beta | \mathcal{O} | \phi_\alpha \rangle = \frac{A!}{(A-n)!} \int d^3x_1 \dots d^3x_n \mathcal{O}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \underline{Q}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n). \quad (\text{A.13b})$$

Densité à n points dans l'espace des impulsions

Par transformée de Fourier de la matrice densité à n points définie par (A.6), on obtient :

$$\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n) = \int d^3x_1 \dots d^3x_n e^{-i \sum_{j=1}^n \vec{q}_j \cdot \vec{x}_j} \underline{\hat{Q}}^{(n)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \quad (\text{A.14a})$$

$$= \int d\xi \phi_{\beta}^*(\xi) e^{-i \sum_{j=1}^n \vec{q}_j \cdot \vec{\xi}} \phi_{\alpha}(\xi). \quad (\text{A.14b})$$

Utilisant les propriétés (A.7) à (A.11), on en déduit les propriétés suivantes pour les matrices $\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}$:

a) Symétries de $\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}$:

$$\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)\dagger}(-\vec{q}_1 \dots -\vec{q}_n) = \tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n), \quad (\text{A.15a})$$

$$\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_{j_1} \dots \vec{q}_{j_n}) = \tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n), \quad (\text{A.15b})$$

si $\{j_1 \dots j_n\}$ est une permutation de $\{1 \dots n\}$.

b) Relations de récurrence :

$$\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n) = 0 \quad \text{pour } n > A, \quad (\text{A.16a})$$

$$\tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n-1)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_{n-1}) = \tilde{\underline{\hat{Q}}}^{(n)}(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_{n-1}, 0) \quad \text{pour } n \leq A, \quad (\text{A.16b})$$

c) Normalisation :

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\beta\alpha}^{(n)}(0 \dots 0) = \delta_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.17})$$

d) Cas particulier :

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{\beta\alpha}^{(1)}(\vec{q}) \equiv \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}) = \int d\zeta \phi_{\beta}^*(\zeta) \left[\frac{1}{A} \sum_{j=1}^A e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \right] \phi_{\alpha}(\zeta) \quad (\text{A.18})$$

est communément appelé facteur de forme de la transition $\alpha \rightarrow \beta$.

e) Réduction des produits de $\mathcal{Q}$:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_1) \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_2) = \frac{A-1}{A} \tilde{\mathcal{Q}}^{(2)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2) + \frac{1}{A} \hat{\mathcal{Q}}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2), \quad (\text{A.19a})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_1) \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_2) \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_3) &= \frac{(A-1)(A-2)}{A^2} \tilde{\mathcal{Q}}^{(3)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3) \\ &+ \frac{A-1}{A} \left\{ \tilde{\mathcal{Q}}^{(2)}(\vec{q}_1, \vec{q}_2 + \vec{q}_3) + \tilde{\mathcal{Q}}^{(2)}(\vec{q}_2, \vec{q}_3 + \vec{q}_1) + \tilde{\mathcal{Q}}^{(2)}(\vec{q}_3, \vec{q}_1 + \vec{q}_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{A^2} \tilde{\mathcal{Q}}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3). \end{aligned} \quad (\text{A.19b})$$

Calcul des densités à n points à partir d'un modèle de fonctions d'onde

En général, les fonctions d'onde nucléaires calculées à partir d'un modèle ne sont pas invariantes par translation. Si l'on note $\phi_{\alpha}^{(n)}$ ces fonctions d'onde, on peut cependant en déduire une matrice densité modèle à n points :

$$\oint_{\beta\alpha}^{(M)} (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n) = \int d^3x_1 \dots d^3x_A \phi_{\beta}^{*(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) e^{-i \sum_{j=1}^A \vec{q}_j \cdot \vec{x}_j} \phi_{\alpha}^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A), \quad (A.20)$$

où $\vec{x}_j$ représente la position du $j^{\text{ème}}$ nucléon comptée à partir d'une origine fixée, comme le centre du potentiel dans le cas du modèle en couche. On supposera que la solution $\phi_{\alpha}^{(M)}$ se factorise, c'est-à-dire

$$\phi_{\alpha}^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \psi_{CM}(\vec{X}) \phi_{\alpha}(\xi), \quad (A.21)$$

où $\vec{X} = \frac{1}{A} \sum_j \vec{x}_j$ représente la position du centre de masse et $\xi_j = \vec{x}_j - \vec{X}$ la position intrinsèque du $j^{\text{ème}}$ nucléon. La fonction d'onde ψ_{CM} décrit le mouvement du centre de masse. A noter que la factorisation (A.21) n'est réalisée pratiquement que pour le modèle en couche de l'oscillateur harmonique. Combinant (A.14), (A.20) et (A.21), on obtient que

$$\oint_{-}^{(n)} (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n) = \oint_{CM}^{-1} (\sum_{j=1}^A \vec{q}_j) \oint_{-}^{(M)} (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n), \quad (A.22)$$

$$\oint_{CM}^{(n)} (\vec{q}) = \int d^3x \psi_{CM}^{*}(\vec{X}) e^{-i \vec{q} \cdot \vec{X}} \psi_{CM}(\vec{X}) \quad (A.23a)$$

$$= \int d^3x_1 \dots d^3x_A \phi_{\beta}^{*(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) e^{-i \vec{q} \cdot \sum_{j=1}^A \vec{x}_j} \phi_{\alpha}^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) \quad (A.23b)$$

est le facteur de forme du centre de masse. Il est indépendant de β et α pour des fonctions d'onde $\phi_n^{(h)}$ et $\phi_\alpha^{(h)}$ associées à des états d'excitation interne de la cible et non pas à un état excité du centre de masse (état spurieux !). La relation (A.22) permet ainsi de relier les densités $\tilde{\rho}^{(h)}$ calculées dans le cadre d'un modèle aux densités $\tilde{Q}^{(h)}$ intervenant dans les calculs. Elle est exacte dans le cas du modèle en couche de l'oscillateur harmonique et approximative sinon, pourvu que le mouvement des coordonnées intrinsèques soit peu corrélé à celui du centre de masse (relation (A.21)).

Modèle en couche de l'oscillateur harmonique

Les fonctions d'onde $\phi_\alpha^{(h)}$ sont construites dans ce cas-là comme produit complètement antisymétrisé de fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique. Aussi la relation (A.21) est-elle satisfaite, au moins pour tous les états tels que le noyau contienne seulement une couche partiellement remplie en protons et en neutrons et que cette couche soit la plus basse en énergie autorisée par le principe de Pauli [ES]. En conséquence, le centre de masse se trouve dans l'état 1s, d'où

$$\tilde{Q}_{cm}(\vec{q}) = e^{-\frac{1}{A} \left(\frac{qR}{2} \right)^2} \quad (A.24)$$

Le paramètre R est lié à la fréquence de l'oscillateur harmonique par la relation $R = (\hbar/m_N \omega)^{1/2}$ où m_N est la masse du nucléon.

Exemples de densités

a) Pour les noyaux tels que $4 \leq A \leq 16$, le modèle fournit :

$$\tilde{\mathcal{M}}(q) \equiv \tilde{\mathcal{M}}(\vec{q}) = \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{A-4}{A} \left(\frac{qR}{2} \right)^2 \right\} e^{-\left(\frac{qR}{2} \right)^2} \quad (\text{A.25a})$$

et

$$\mathcal{M}(r) \equiv \mathcal{M}(\vec{r}) = \frac{1}{-\frac{4}{3}R^3} \frac{4}{A} \left\{ 1 + \frac{A-4}{6} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} e^{-\left(\frac{r}{R} \right)^2}, \quad (\text{A.25b})$$

où $q=|\vec{q}|$ et $r=|\vec{r}|$.

b) Considérant que le premier état excité 2^+ du ^{12}C est issu de l'excitation d'un nucléon de l'état $1p_{3/2}$ à l'état $1p_{1/2}$, on obtient :

$$\left[\mathcal{M}_{2^+,0}(\vec{q}) \right]_M = B_{2^+} q^2 e^{-\left(\frac{qR}{2} \right)^2} \left(i^2 D_{0M}^{(2)}(\hat{q}) \right)^* \quad (\text{A.26a})$$

et

$$\left[\mathcal{M}_{2^+,0}(\vec{r}) \right]_M = \frac{4B_{2^+}}{R^2} \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}R^3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 e^{-\left(\frac{r}{R} \right)^2} D_{0M}^{(2)}(\hat{r}), \quad (\text{A.26b})$$

avec $B_{2^+} = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{2}}{3} R^2$.

APPENDICE B : EXPRESSIONS EXPLICITES DE LA "FORMULE" DE GLAUBER DANS
LE CADRE DU MODELE EN COUCHE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Dans ce travail, nous décrivons la structure nucléaire des noyaux pair-pair légers tels que ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ ou ${}^{16}\text{O}$ par le modèle en couche de l'oscillateur harmonique. La fonction d'onde nucléaire de l'état α s'exprime donc par

$$\phi_{\alpha}^{(M)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det \left[\psi_{\alpha_j}(\vec{x}_k) \right], \quad (\text{B.1})$$

où $\vec{x}_k$ désigne la position du $k^{\text{ème}}$ nucléon et α_j l'ensemble des nombres quantiques caractérisant le $j^{\text{ème}}$ nucléon. Les fonctions d'onde à une particule ψ_{α_j} sont données par

$$\psi_{\alpha_j}(\vec{x}) = \sum C_{n, \mu, M_j}^{l_j \frac{1}{2} I_j} Y_{lm}^{[l_j]}(\hat{x}) \psi_{(n, l_j)}(r) \chi_{\mu, \tau_j}, \quad (\text{B.2})$$

où n , l_j , I_j et M_j désignent respectivement le nombre quantique principal, le moment orbital, le moment cinétique total et sa projection selon l'axe de quantification. De plus, χ_{μ, τ_j} représente le produit d'un spineur de composante μ et d'un isospineur de composante τ_j ; $\psi_{(n, l_j)}(r)$ est la solution de l'équation de Schrödinger

radiale avec un potentiel harmonique de fréquence ω , soit :

$$\Psi_{(\eta_j \ell_j)}(r) = \frac{1}{R_j^{\ell_j + 1/2}} \sqrt{\frac{2(\eta_j - 1)!}{\Gamma(\ell_j + \eta_j + 1/2)}} r^{\ell_j} e^{-\frac{1}{2}(\frac{r}{R})^2} L_{\eta_j - 1}^{\ell_j + 1/2}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \quad (\text{B.3})$$

avec le paramètre de rayon $R = (\hbar/m_n \omega)^{1/2}$ et m_n la masse du nucléon. Les densités nucléaires et les facteurs de forme issus de ce modèle sont cités dans l'appendice A (formules (A.25) et (A.26)). Nous supposons les configurations suivantes des fonctions d'onde de l'état fondamental :

${}^4\text{He}$	${}^{12}\text{C}$	${}^{16}\text{O}$
2 $s_{1/2}$	$2 \ 4$ $s_{1/2} \ p_{1/2}$	$2 \ 4 \ 2$ $s_{1/2} \ p_{1/2} \ p_{3/2}$

(B.4)

valables à la fois pour les neutrons et les protons.

Dans ces conditions, la fonction de profil pion-noyau prédite par la théorie de Glauber s'écrit :

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{(M)}(b) \equiv \delta_{\beta\alpha} - \langle \phi_{\beta}^{(M)} | \prod_{j=1}^A (1 - \gamma(b - \vec{r}_j)) | \phi_{\alpha}^{(M)} \rangle \quad (\text{B.5a})$$

$$= \delta_{\beta\alpha} - \det \left(\delta_{\beta_n \alpha_m} - t_{\beta_n \alpha_m}(b) \right), \quad (\text{B.5b})$$

où

$$t_{\beta_n \alpha_n}(\vec{b}) = \int d^3x \psi_{\beta_n}^*(\vec{x}) \chi(\vec{b}-\vec{z}) \psi_{\alpha_n}(\vec{x}) \quad (\text{B.6})$$

représente les éléments de matrice à un corps de la fonction de profil pion-nucléon χ . Si l'on choisit de paramétriser l'amplitude de diffusion pion-nucléon par une gaussienne en transfert d'impulsion (équation (3.12)),

$$\chi(\vec{b}) = \frac{v(1-ig)}{4\pi a} e^{-\frac{b^2}{2a}}, \quad (\text{B.7})$$

et les éléments de matrice $t_{\beta_n \alpha_n}(\vec{b})$ s'expriment analytiquement comme des polynômes en $\vec{b}$ multipliés $\exp(-b^2)$ avec

$$\vec{b} = |\vec{b}|/\bar{R}, \quad (\text{B.8a})$$

$$\bar{R}^2 = R^2 + 2a. \quad (\text{B.8b})$$

Le calcul explicite du déterminant (B.5b) nous fournit ensuite la fonction de profil pion-noyau.

1) Diffusion élastique

Le moment cinétique total du noyau étant nul, l'amplitude de diffu-

sion pion-noyau prend la forme :

$$F_G(\vec{q}) = e^{\frac{1}{A} \left(\frac{qR}{2}\right)^2} iK \int_0^\infty b db J_0(qb) \left\{ 1 - (1 - G(b))^4 \right\}, \quad (B.9)$$

où $\vec{q}$ désigne le transfert d'impulsion et

$$G(b) = \sum_{h=1}^{A/4} (-1)^{h-1} P_h(b) \left[\frac{b(1-is)}{2\pi R^2} e^{-b^2} \right]^n. \quad (B.10)$$

Les fonctions $P_h(b)$ sont des polynômes en b^2 , soit

a) pour ${}^4\text{He}$:

$$P_1(b) = 1, \quad (B.11a)$$

b) pour ${}^{12}\text{C}$:

(B.11b)

$$P_1(b) = 3 + \frac{4}{3} b^2 (b^2 - 1) \quad ; \quad P_2(b) = 3 - \frac{4}{3} b^2 (8 - b^2) + \frac{2}{3} b^2 (2 - b^2) b^2 ;$$

$$P_3(b) = 1 - \frac{4}{3} b^2 (4 - b^2) ;$$

c) pour $^{16}_0$:

$$P_1(b) = 4 + 2\varrho^2(b^2-1) \quad ; \quad P_2(b) = 6 - \varrho^2(6-\varrho^2) + 2\varrho^2(2-\varrho^2)b^2;$$

$$P_3(b) = 4 - 2\varrho^2(3-\varrho^2) + 2\varrho^2(1-\varrho^2)b^2 \quad ; \quad P_4(b) = (1-\varrho^2)^2, \quad (B.11c)$$

où

$$\varrho^2 = \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{2a}{R^2}} \leq 1. \quad (B.12)$$

Notons que les expressions (B.9) à (B.12) peuvent être généralisées au cas où l'on tient compte de la force de Coulomb agissant entre le projectile et les protons de la cible (voir Leśniak et Leśniak [LL]). Citons encore à titre de comparaison les expressions de la fonction de profil (3.3) obtenue à partir d'une densité à A points factorisée, à savoir

$$\mathcal{G}^{(A)}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_A) = \prod_{j=1}^4 \mathcal{G}_s(\vec{x}_j) \prod_{j=5}^A \mathcal{G}_p(\vec{x}_j), \quad (B.13)$$

où $\mathcal{G}_s$ et $\mathcal{G}_p$ représentent les densités à une particule dans les états s et p . On obtient [BW] :

$$\Gamma_G^{(M)}(b) = 1 - (1 - G_s(b))^4 (1 - G_p(b))^{A-4}, \quad (B.14)$$

qui remplace l'intégrant de (B.9), avec

$$G_s(b) = \frac{\zeta(1-i\eta)}{2\pi\bar{R}^2} e^{-b^2}, \quad (\text{B.15a})$$

$$G_p(b) = \left\{ 1 + \frac{2}{3} \varrho^2 (b^2 - 1) \right\} \frac{\zeta(1-i\eta)}{2\pi\bar{R}^2} e^{-b^2}. \quad (\text{B.15b})$$

Pour ${}^4\text{He}$, nous retrouvons les expressions précédentes (B.9) à (B.11a). En revanche pour les noyaux plus lourds, la factorisation (B.13) n'est pas réalisée lorsque l'on tient compte du principe de Pauli en antisymétrisant la fonction d'onde nucléaire (B.1). Afin d'en comprendre les conséquences physiques, nous considérons la limite d'une amplitude pion-nucléon décroissant beaucoup moins vite que le facteur de forme élastique, c'est-à-dire :

$$\frac{2a}{R^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{R} = R \\ \varrho = 1 \end{cases}. \quad (\text{B.16})$$

Pour les noyaux n'ayant que des couches complètes en ℓ (dans notre cas ${}^4\text{He}$ et ${}^{16}\text{O}$), il vient à partir de (B.1) [Ko] :

$$\Gamma_G^{(n)}(b) = 1 - \prod_{n=1}^{N_c} (1 - N_n G_n(b)), \quad (\text{B.17})$$

où N_c désigne le nombre de couches remplies et N_n le nombre de nucléons dans la couche n †. Les fonctions $G_n(b)$ sont données par

$$G_n(b) = \frac{1}{2} V(1-i\eta) \int_{-M}^{\infty} g_n(b, z) dz, \quad (B.18)$$

et coïncident avec (B.15) pour $a = 0$. L'examen de (B.17) nous révèle donc qu'en raison du principe d'exclusion de Pauli, le pion "voit" le noyau non pas comme un ensemble de A nucléons (équation B.14), mais plutôt comme celui de N_c agglomérats indépendants de densité $g_n(\vec{r})$. Remarquons encore que les "Ansatz" (B.1) et (B.13) conduisent à la même densité nucléaire (A.25), si bien que le potentiel optique élastique au premier ordre n'en dépend pas.

2) Diffusion inélastique

Nous considérons l'excitation du niveau $2^+(4.4 \text{ MeV})$ du ^{12}C traité comme un état particule-trou $(p_{\frac{1}{2}})^{-1}(p_{\frac{3}{2}})$ avec les fonctions d'onde à une particule (B.2). Dans ces conditions, l'amplitude de transition à l'état 2^+M s'écrit :

$$\left[F_{2,0}^G(\vec{q}) \right]_M = A e^{\frac{1}{A} \left(\frac{qR}{2} \right)^2} iK \int_0^{\infty} b db J_M(qb) (1 - G(b))^3 D_{|M|}(b), \quad (B.19)$$

† Dans ce contexte, les couches sont numérotées par le moment orbital ℓ , la projection du spin μ et celle de l'isospin τ .

où les fonctions $D_{|M|}(b)$ sont des polynômes en b^2 multipliés par $\exp(-b^2)$, i.e.

$$D_0(b) = \frac{2B_{2+}}{\bar{R}^2} \left\{ 1 - b^2 - (2 - 2^2 - (1 - 2 \cdot 2^2) b^2) E + (1 - 2^2) E^2 \right\} E, \quad (B.20a)$$

$$D_1(b) = 0, \quad (B.20b)$$

$$D_2(b) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2B_{2+}}{\bar{R}^2} \left\{ 1 - E \right\} E, \quad (B.20c)$$

avec la notation $E = [\psi(1-i\eta)/2\pi\bar{R}^2] \exp(-b^2)$. La fonction $G(b)$ est identique à celle (B.10) décrivant la diffusion élastique par ^{12}C . Le paramètre B_{2+} a la même signification que celui apparaissant dans les équations (3.23) et (A.26). Notre modèle de particules indépendantes prédit $B_{2+} = (\sqrt{2}/36) \bar{R}^2 \approx 0.098$, c'est-à-dire une valeur environ trois fois plus petite que celle obtenue à partir de la diffusion par des électrons (voir table 2). Cette différence reflète le caractère très collectif du niveau $2^+(4.4 \text{ MeV})$ du ^{12}C . En conséquence, pour nos calculs de l'amplitude de diffusion par la formule (B.19), nous avons toujours utilisé la valeur de B_{2+} tirée des mesures d'électrons.

APPENDICE C : EXPRESSIONS EXPLICITES DES POTENTIELS OPTIQUES

AU PREMIER ORDRE

Dans le chapitre 3, nous avons ramené le problème de la diffusion élastique d'un pion sur un noyau à la résolution d'une équation de Schrödinger :

$$\left(\Delta + K^2 - V_{opt}(\vec{x}) \right) \psi^{(+)}_{0\vec{K}}(\vec{x}) = 0, \quad (C.1)$$

où $\vec{K}$ représente l'impulsion du pion incident dans le système du centre de masse pion-noyau. Le potentiel optique local $V_{opt}(\vec{x})$ s'obtient au premier ordre à partir de (3.7) et (3.8), soit :

$$V_{opt}(\vec{x}) = - \frac{A-1}{2\pi^2} \int d\vec{q} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \left(\frac{K}{q} \right) f(\vec{q}) \tilde{M}(\vec{q}), \quad (C.2)$$

où $\vec{K}$ et f désignent respectivement l'impulsion du pion incident et l'amplitude de diffusion pion-nucléon (1.38) dans le système du centre de masse pion-nucléon. Avec notre paramétrisation gaussienne de f (équation (3.12)) et le modèle en couche de l'oscillateur harmonique, le potentiel optique (C.2) prend la forme particulièrement simple :

$$V_{opt}(\vec{x}) = - 4\pi \left[\frac{K}{k} f(0) \right] (A-1) \tilde{M}(\vec{x}), \quad (C.3)$$

où

$$\bar{\mathcal{M}}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2 \bar{R}^3} \left\{ 1 - \frac{A-4}{A} \varrho^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{\bar{R}} \right)^2 \right) \right\} e^{-\left(\frac{r}{\bar{R}} \right)^2} \quad (C.4)$$

et

$$\bar{R}^2 = R^2 + 2a \quad ; \quad \varrho^2 = \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2. \quad (C.5)$$

A noter que $\bar{\mathcal{M}}(\vec{x})$ est normée à 1 et coïncide avec la densité nucléaire $\mathcal{M}(\vec{x})$ (A.25b) lorsque l'amplitude de diffusion pion-nucléon décroît beaucoup moins rapidement que le facteur de forme élastique, i.e. $2a/R^2 \ll 1$. Cette condition est cependant loin d'être remplie pour la diffusion π -noyau à des énergies voisines de la résonance (3,3). Il s'ensuit que la fonction $\bar{\mathcal{M}}(\vec{x})$ présente plutôt un comportement gaussien comme on peut le voir sur l'expression (C.4) pour $\varrho \ll 1$. Son rayon quadratique moyen s'écrit :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{5A-8}{2A} R^2 + 3a. \quad (C.6)$$

Il dépend de l'énergie du pion incident par l'intermédiaire du paramètre a [BG]. Soulignons de plus que la partie imaginaire du potentiel optique (C.3) est toujours négative si bien que, même localement, aucun pion n'est créé. Enfin l'amplitude de diffusion pion-noyau

s'obtient à partir de la fonction d'onde $\psi_{0\vec{k}}^{(t)}(\vec{x})$ par la relation

$$F(\vec{k}', \vec{k}) = e^{\frac{1}{A} \left(\frac{|\vec{k}' - \vec{k}| R}{2} \right)^2} \int d^3x \frac{e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[-2\pi^2 \frac{A}{A-1} V_{0\vec{k}'}(\vec{x}) \right] \psi_{0\vec{k}}^{(t)}(\vec{x}). \quad (C.7)$$

Nous pouvons considérer d'autre part la solution eikonale de l'équation de Schrödinger (C.1). En appliquant les résultats du paragraphe (3.1), l'amplitude de diffusion (C.7) prend la forme :

$$F_E(\vec{q}) = e^{\frac{1}{A} \left(\frac{qR}{2} \right)^2} i k \int_0^\infty b db J_0(qb) \frac{A}{A-1} \left(1 - e^{i X_E^{(H)}(b)} \right), \quad (C.8)$$

où $\vec{q}$ désigne le transfert d'impulsion $\vec{k}' - \vec{k}$. Le déphasage eikonal $X_E^{(H)}(b)$ est donné par

$$i X_E^{(H)}(b) = \frac{i}{2k} \int_{-b}^b dz V_{0\vec{k}'}(b, z) \quad (C.9a)$$

$$= -\frac{1}{2} V(1-i\vartheta) (A-1) \bar{\vartheta}(b). \quad (C.9b)$$

La fonction $\bar{\mathcal{T}}(b)$ décrit le facteur de transmission effectif du noyau, c'est-à-dire :

$$\bar{\mathcal{T}}(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{M}}(b, z) dz \quad (\text{C.10a})$$

$$= \frac{1}{\pi \bar{R}^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{A-4}{A} \bar{z}^2 (\bar{b}^2 - 1) \right) e^{-\bar{b}^2}, \quad (\text{C.10b})$$

avec $\bar{b} = b / \bar{R}$. En introduisant les fonctions $G_h(b)$ définies par (B.15), l'intégrant de (C.8) peut aussi s'écrire :

(C.11)

$$\Gamma_E^{(n)}(b) = \frac{A}{A-1} \left\{ 1 - \left(e^{-\frac{A-1}{A} G_s(b)} \right)^4 \left(e^{-\frac{A-1}{A} G_p(b)} \right)^{A-4} \right\}.$$

Notons une fois de plus la grande ressemblance entre cette expression issue de l'approximation eikonale du potentiel optique au premier ordre et la fonction de profil (B.14) calculée à partir de la "formule" de Glauber.

Diffusion inélastique

Nous considérons l'excitation des états de parité naturelle d'un noyau dont le niveau fondamental est de moment cinétique nul. Nous

paramétrisons de plus le facteur de forme de transition par (3.23).

Il en découle que la densité nucléaire $\rho_{\beta}^{(M)}(\vec{x})$ s'écrit :

$$\left[\rho_{\beta}^{(M)}(\vec{x}) \right]_{M_{\beta}} = \left\{ \frac{\gamma_{\beta}}{r_{\beta}^{3/2}} \left(\frac{r}{r_{\beta}} \right)^{I_{\beta}} \left[1 + \alpha_{\beta} \left(\frac{r}{r_{\beta}} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{r}{r_{\beta}} \right)^2} \right\} \sqrt{\frac{4\pi}{2I_{\beta}+1}} \frac{Y_{M_{\beta}}^{I_{\beta}}(\hat{x})}{M_{\beta}}, \quad (C.12)$$

avec

$$\gamma_{\beta} = \frac{B_{\beta}}{(r_{\beta/2})^{I_{\beta}}} \left[1 - \gamma_{\beta} \left(I_{\beta} + \frac{3}{2} \right) \right] \quad \text{et} \quad \alpha_{\beta} = \frac{\gamma_{\beta}}{1 - \gamma_{\beta} (I_{\beta} + \frac{3}{2})}. \quad (C.13)$$

Remarquons que I_{β} et M_{β} désignent le moment cinétique de l'état excité et sa projection selon l'axe de quantification. D'autre part, les paramètres γ_{β} , B_{β} et r_{β} caractérisent le facteur de forme de transition $S_{\beta}(q)$. Leurs valeurs prédites par quelques modèles nucléaires courants sont données dans la table 2 pour les deux premiers états 2^{+} et 3^{-} du ^{12}C . Grâce à ce choix pour $\rho_{\beta}^{(M)}(\vec{x})$ et en paramétrisant par une gaussienne l'amplitude de diffusion pion-nucléon (équation (3.12)), nous pouvons calculer analytiquement la fonction de profil pion-noyau (3.21). Dès lors, l'amplitude de transition à l'état excité β (3.1) devient :

$$\left[F_{\beta_0}^E(\vec{q}) \right]_{M_\beta} = A e^{\frac{1}{A} \left(\frac{q R_\beta}{2} \right)^2} i K \int_0^\infty b db J_{M_\beta}(qb) e^{i \chi_E^{(M)}(b)} D_{\beta | M_\beta|}(b), \quad (C.14)$$

avec

$$D_{\beta M}(b) = \frac{B_\beta}{\bar{R}_\beta^{I_\beta}} i^M C_{I_\beta M} \left[\frac{\Gamma(1-i\beta)}{2\pi \bar{R}_\beta^2} b^M e^{-\frac{b^2}{\beta}} \right] \times \quad (C.15a)$$

$$\times \left\{ L_{\frac{I_\beta-M}{2}}^M \left(\frac{b^2}{\beta} \right) - \gamma_\beta \left(\frac{R_\beta}{\bar{R}_\beta} \right)^2 L_{\frac{I_\beta-M+2}{2}}^M \left(\frac{b^2}{\beta} \right) \right\},$$

et

$$C_{IM} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(I-M)!(I+M)!}}{\left(\frac{I-M}{2}\right)!\left(\frac{I+M}{2}\right)!} & \text{si } I-M \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (C.15b)$$

En écrivant (C.15), nous avons adopté les notations

$$\bar{R}_\beta^2 = R_\beta^2 + 2a \quad \text{et} \quad \bar{b}_\beta = \frac{b}{\bar{R}_\beta}. \quad (\text{C.16})$$

De plus les polynômes de Laguerre généralisés y sont normalisés de telle sorte que

$$L_k^n(0) = \frac{(k+n)!}{n!}. \quad (\text{C.17})$$

Le déphasage eikonal $\chi_E^{(M)}(b)$ apparaissant dans (C.14) est identique à celui qui décrit la diffusion élastique. Son expression explicite est donnée ci-dessus par les équations (C.9). Rappelons aussi que l'expression (C.14) pour l'amplitude de transition ne fait intervenir que les processus dans lesquels le pion excite en une fois le noyau. Il en découle qu'elle dépend linéairement du paramètre B_β . De plus, la règle de sélection contenue dans (C.15b) implique que la section efficace différentielle pour l'excitation d'un état nucléaire de moment cinétique impair s'annule vers l'avant. Cette propriété générale découle en fait de l'invariance sous les rotations et de la conservation de la parité, si bien qu'elle se manifeste aussi dans les calculs effectués à l'aide de la "formule" de Glauber (voir (B.20) et la référence [Ga]).

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur J.P. Amiet qui a su diriger judicieusement ce travail et permis par son aide efficace de le mener à bien rapidement. Je remercie aussi vivement Monsieur le Professeur P. Huguenin qui, dans nos nombreuses discussions, m'a fait découvrir les aspects passionnants de la diffusion pion-noyau. J'adresse encore mes remerciements à tous mes amis du groupe de Physique Théorique pour leurs conseils et leur compréhension. Ma reconnaissance va enfin à Monsieur J. Beiner qui a conçu et réalisé à mon intention un programme de résolution de l'équation de Schrödinger.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AG] J.P. Amiet et J.F. Germond, à paraître
- [Be] J. Beiner, Nucl. Phys. B53 (1973) 349-365
- [BG] J. Beiner et J.F. Germond, Phys. Lett. 46B (1973) 289-290
- [Bi] F. Binon et al., Nucl. Phys. B17 (1970) 168-188
- [BV] R.W. Bercaw et al., Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 1031-1034
- [BW] R.H. Bassel et C. Wilkin, Phys. Rev. 174 (1968) 1179-1199
- [Ei] J.M. Eisenberg, Ann. Phys. 71 (1972) 542-555
- [ES] J.P. Elliott et T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A212 (1955) 561-566
- [FC] R.F. Frosch et al., Phys. Rev. 160 (1967) 874-879
- [Fe] H. Feshbach et J. Hüfner, Ann. Phys. 56 (1970) 268-294 ;
H. Feshbach, A. Gal et J. Hüfner, Ann. Phys. 66 (1971) 20-59 ;
E. Lambert et H. Feshbach, Ann. Phys. 76 (1973) 80-115
- [Fr] J.L. Friar, Nucl. Phys. A173 (1971) 248- 256 ;
J.L. Friar, Particles and Nuclei 5 (1973) 45-58
- [FW] L.L. Foldy et J.D. Walecka, Ann. Phys. 54 (1969) 447-504
- [GA] J.F. Germond et J.P. Amiet, Nucl. Phys. A216 (1973) 157-165
- [Gl] R.J. Glauber, Lectures in theoretical Physics, eds. W.E. Brittin et L.G. Dunham (Interscience Publishers, New-York, 1959),
vol. 1, p. 315-414
- [GP] J.F. Germond et M. Perrinjaquet, en préparation
- [GV] V. Gillet et N. VinhMau, Nucl. Phys. 54 (1964) 321-351
- [GW] M.L. Goldberger et K.M. Watson, "Collision Theory", Wiley,
New-York, 1964
- [Go] P. Goldhammer, Rev. Mod. Phys. 35 (1963) 40-107

- [Gu] R. Guardiola, *Il Nuovo Cimento* 3A (1971) 747-754
- [Ha] D.R. Harrington, *Phys. Rev.* 184 (1969) 1745-1749
- [KM] A.K. Kerman, H. McManus et R.M. Thaler, *Ann. Phys.* 8 (1959) 551-635
- [Ko] O. Kofoed-Hansen, *Nucl. Phys.* B54 (1973) 42-60
- [LL] H. Leśniak et L. Leśniak, *Nucl. Phys.* B38 (1972) 221-246
- [LM] H.K. Lee et H. McManus, *Phys. Rev.* 161 (1967) 1087-1098
- [LS] M.P. Locher, O. Steinmann et N. Straumann, *Nucl. Phys.* B27 (1971) 598-604
- [ML] H.K. Lee et H. McManus, *Phys. Rev. Lett.* 20 (1968) 337-340
- [Mo] R.J. Moore, *Phys. Rev.* D2 (1970) 313-316
- [Ne] R.G. Newton, "Scattering Theory of Waves and Particles",
Mc Graw-Hill (1966)
- [Os] T.A. Osborn, *Ann. Phys.* 58 (1970) 417-453 ;
T.A. Osborn, *Nucl. Phys.* B46 (1972) 538-546
- [Re] E.A. Remler, *Phys. Rev.* 176 (1968) 2108-2112
- [RW] C. Rogers et C. Wilkin, *Nuovo Cimento Lett.* 1 (1971) 575-578
- [St] J.P. Stroot, *Proc. 4th Int. Conf. on high energy physics and
nuclear structure, Dubna (1971) éd. V.P. Dzhelepov, p. 221-240*
- [Wi] C. Wilkin, *Proc. Spring school on pion interactions at low and
medium energies, CERN Report 71-14 (1971) 289-378*

TABLE 2

Paramètres des facteurs de forme de transition du ^{12}C prédits par différents modèles nucléaires

Modèle	V_{2+}	$B_{2+} [f_m^2]$	$R_{2+} [f_m]$	V_{3-}	$B_{3-} [f_m^3]$	$R_{3-} [f_m]$
Particules indépendantes	0	.098	1.58	-	-	-
"Electronique"	0	.284	1.80	0	.176	1.91
Vibrations [Fr]	4/13	.335	1.58	4/17	.154	1.58
Ajustement de Friar [Fr]	.175	.268	1.61	.147	.117	1.61
Particule-trou de Gillet [GV]	-.034	.217	1.72	0	.105	1.72

LEGENDE DES FIGURES

1. Dérivations de la "formule" de Glauber à partir de la théorie potentielle de diffusion multiple.
2. Effets des corrélations du centre de masse dans la diffusion $\alpha^- - {}^4\text{He}$ à 180 MeV : ——— avec corrélations, — — — sans corrélations.
3. Comme fig. 2, mais pour la diffusion $\alpha^- - {}^{12}\text{C}$ à 180 MeV. Les points expérimentaux sont ceux de Binon et al. [Bi] .
4. Comme fig. 2, mais pour la diffusion $\alpha^- - {}^{16}\text{O}$ à 170 MeV. Les points expérimentaux sont ceux de Bercaw et al. [BV] .
5. Sections efficaces différentielles $\alpha^- - {}^4\text{He}$ à 180 et 260 MeV. Les courbes théoriques proviennent des calculs cités dans le paragraphe (3.1) : ——— solution exacte de l'équation (2.19) avec le potentiel optique au premier ordre (3.8), — — — approximation eikonale (3.13), — — — "formule" de Glauber (3.3). Les points expérimentaux sont ceux cités par Stroot [St] . Le facteur d'échelle a été choisi de telle sorte que théorie et expérience coïncident vers l'avant.
6. Comme fig. 5, mais pour la diffusion $\alpha^- - {}^{12}\text{C}$. Les points expérimentaux sont ceux de Binon et al. [Bi] .
7. Comme fig. 5, mais pour la diffusion $\alpha^- - {}^{16}\text{O}$. Les points expérimentaux sont ceux de Bercaw et al. [BV] .

8. Sections efficaces différentielles pour l'excitation du niveau $2^+(4.4 \text{ MeV})$ du ^{12}C par des α^- de 180 et 260 MeV. Les points expérimentaux sont ceux de Binon et al. [Bi]. Les courbes théoriques proviennent des calculs cités dans le paragraphe (3.2) avec les modèles nucléaires : ——— "électronique", — — — de vibration, — — — de particule-trou de Gillet.
9. Comme fig. 8, mais pour l'excitation du niveau $3^-(9.6 \text{ MeV})$ du ^{12}C .
10. Sections efficaces différentielles pour l'excitation du niveau $2^+(4.4 \text{ MeV})$ du ^{12}C par des α^- de 150 MeV. Les points expérimentaux sont ceux de Binon et al. [Bi]. Les courbes théoriques proviennent des calculs cités dans le paragraphe (3.2) : ——— "formule" de Glauber, — — — approximation eikonale (3.21).

théorie potentielle de diffusion multiple

$$T = V + V \frac{1}{d} T$$

$$V = \sum_j V_j A; \quad d = (E - K - H_A + i0)$$

- dégénérescence des états nucléaires intermédiaires
- linéarisation du propagateur

$$\hat{T} = V + V \hat{G}_0 \hat{T}$$

$$V = \sum_j V_j A$$

$$F_{\alpha}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_{\alpha} | 1 - \hat{\mathcal{U}}_{j=1}^A (1 - \hat{\mathcal{U}}_b \hat{\mathcal{T}}_j) | \phi_{\alpha} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U} \\ \hat{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T} \end{pmatrix}$$

"Formule" de

Glauber

$$F_{\alpha}(\vec{q}) \approx \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle \phi_{\alpha} | 1 - \hat{\mathcal{U}}_{j=1}^A (1 - \mathcal{U}_b \mathcal{T}_j) | \phi_{\alpha} \rangle$$

fig. 1

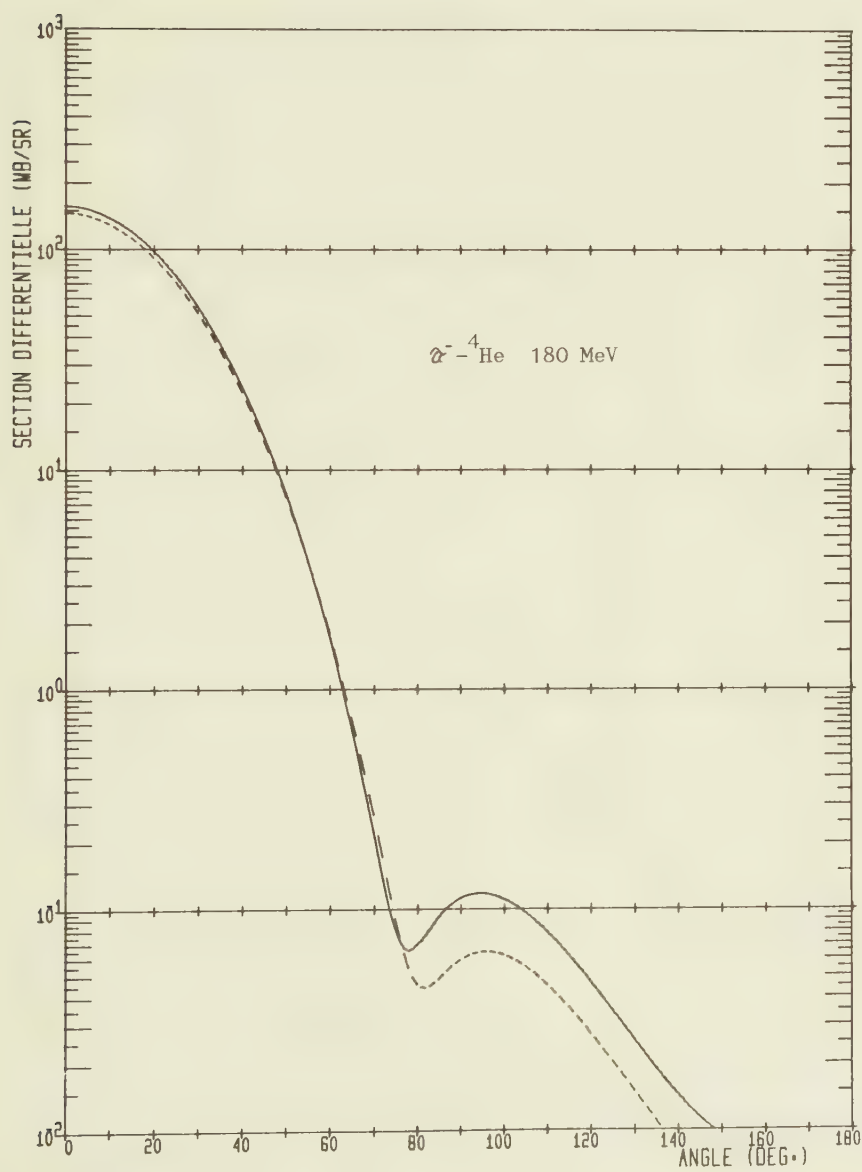


fig. 2

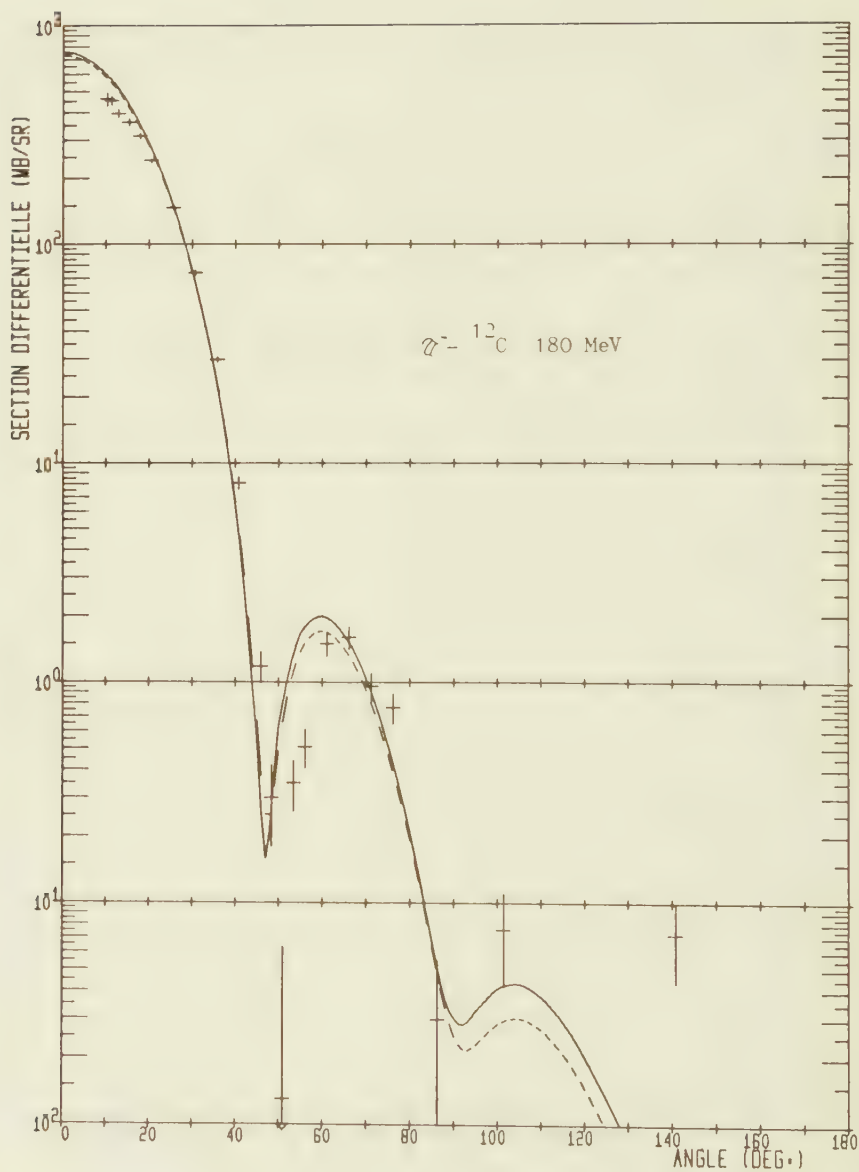


fig. 3

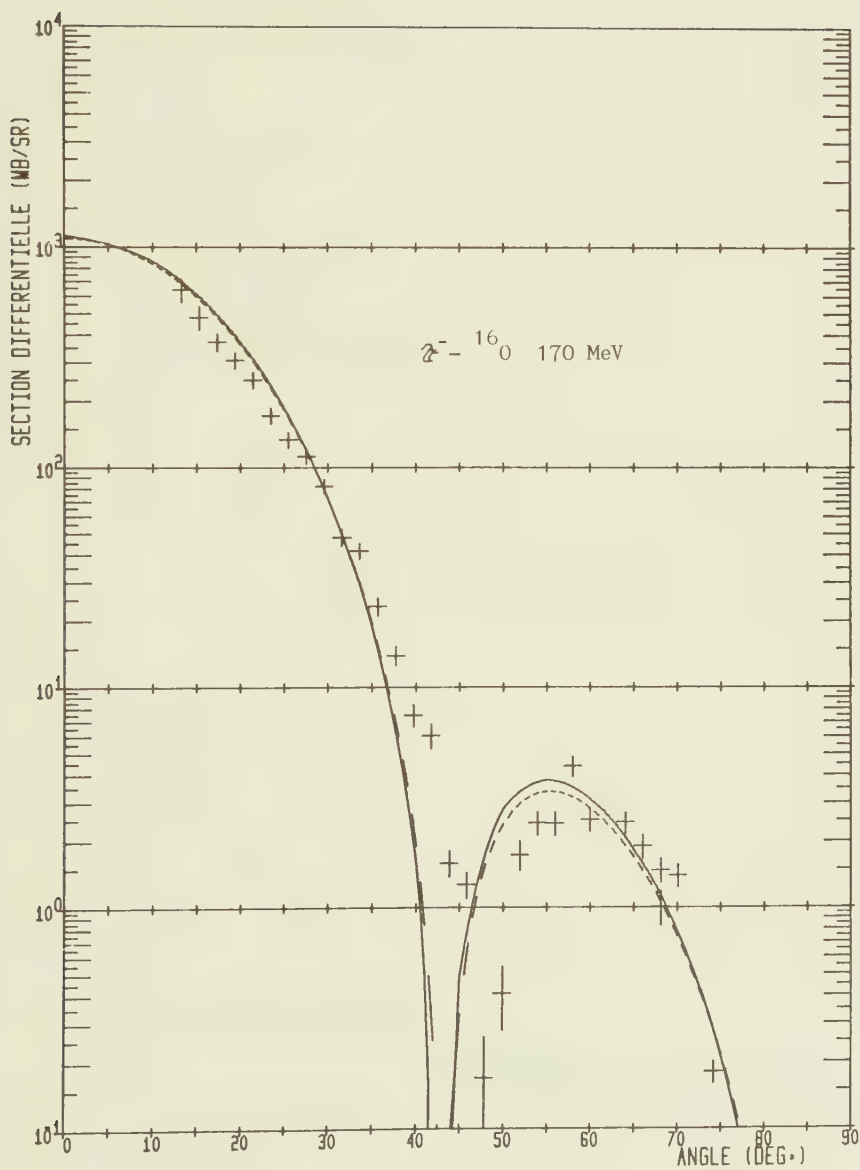


fig. 4

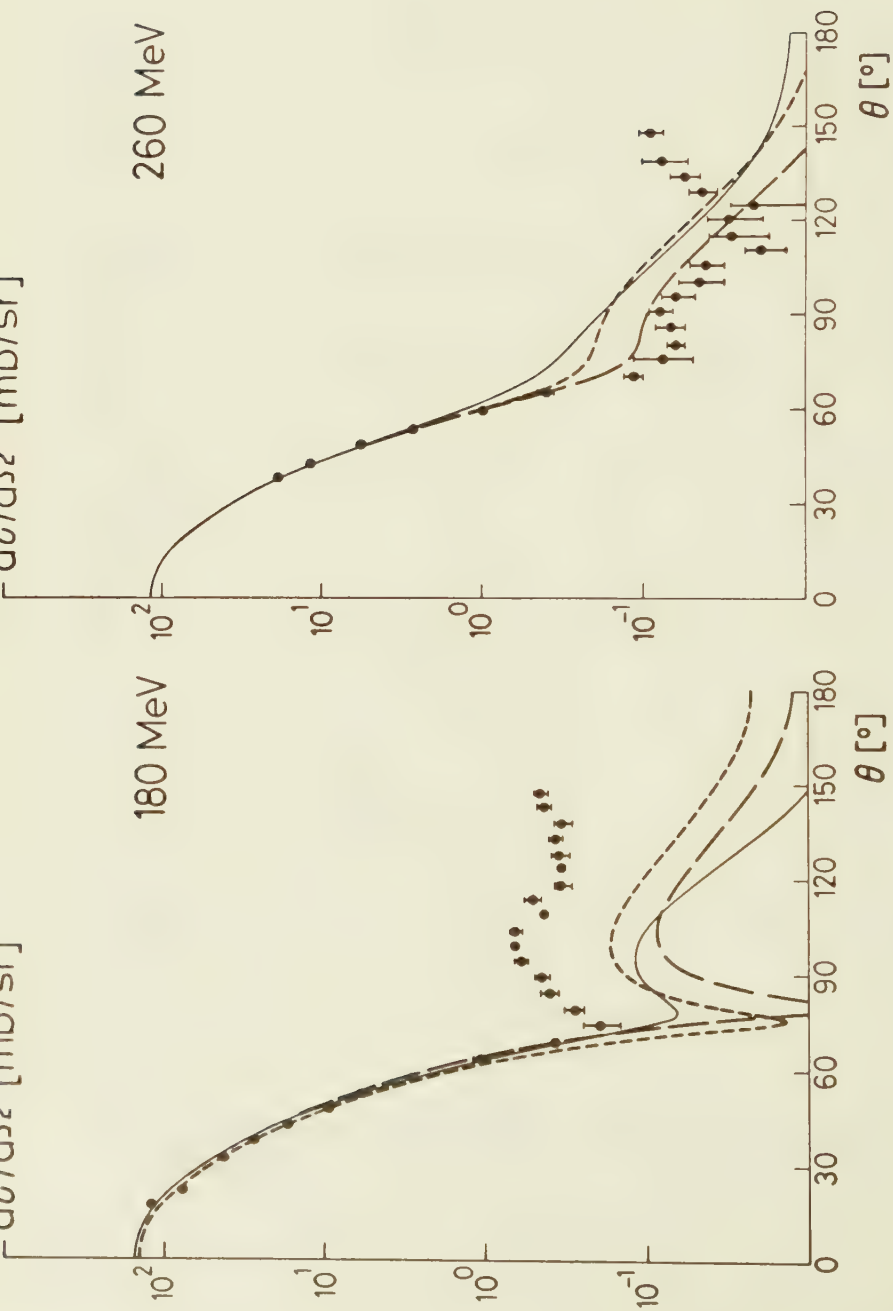
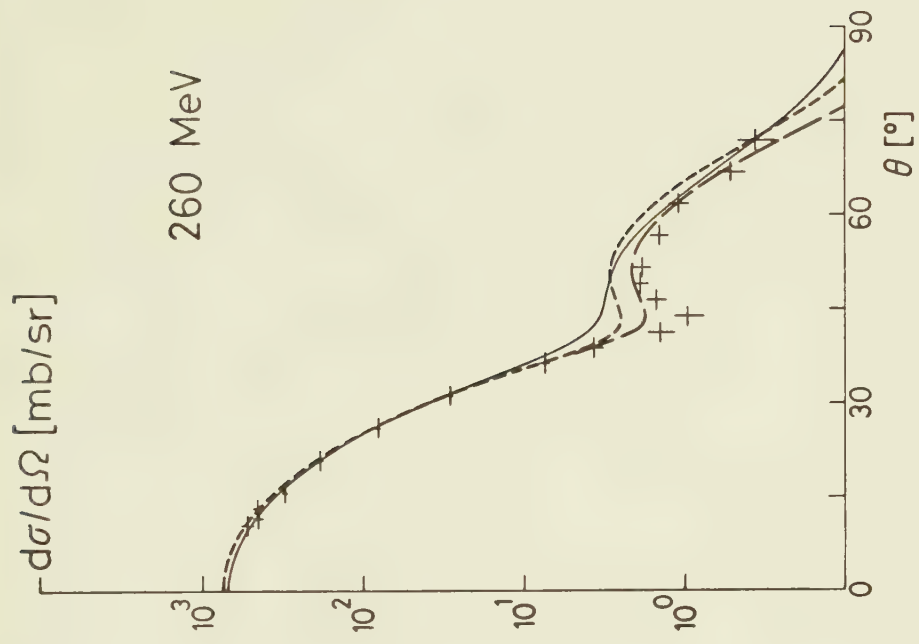
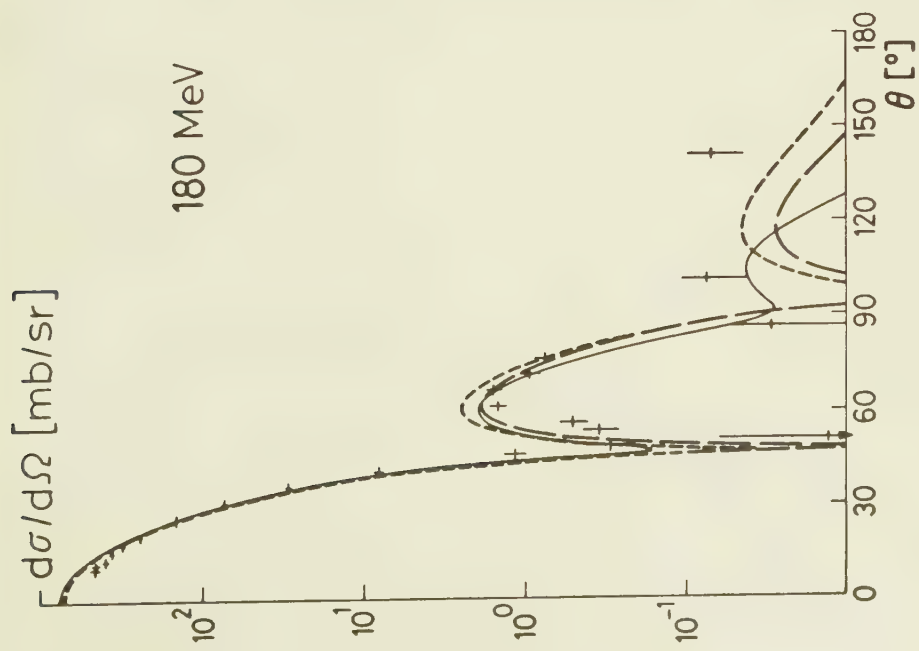


fig. 5



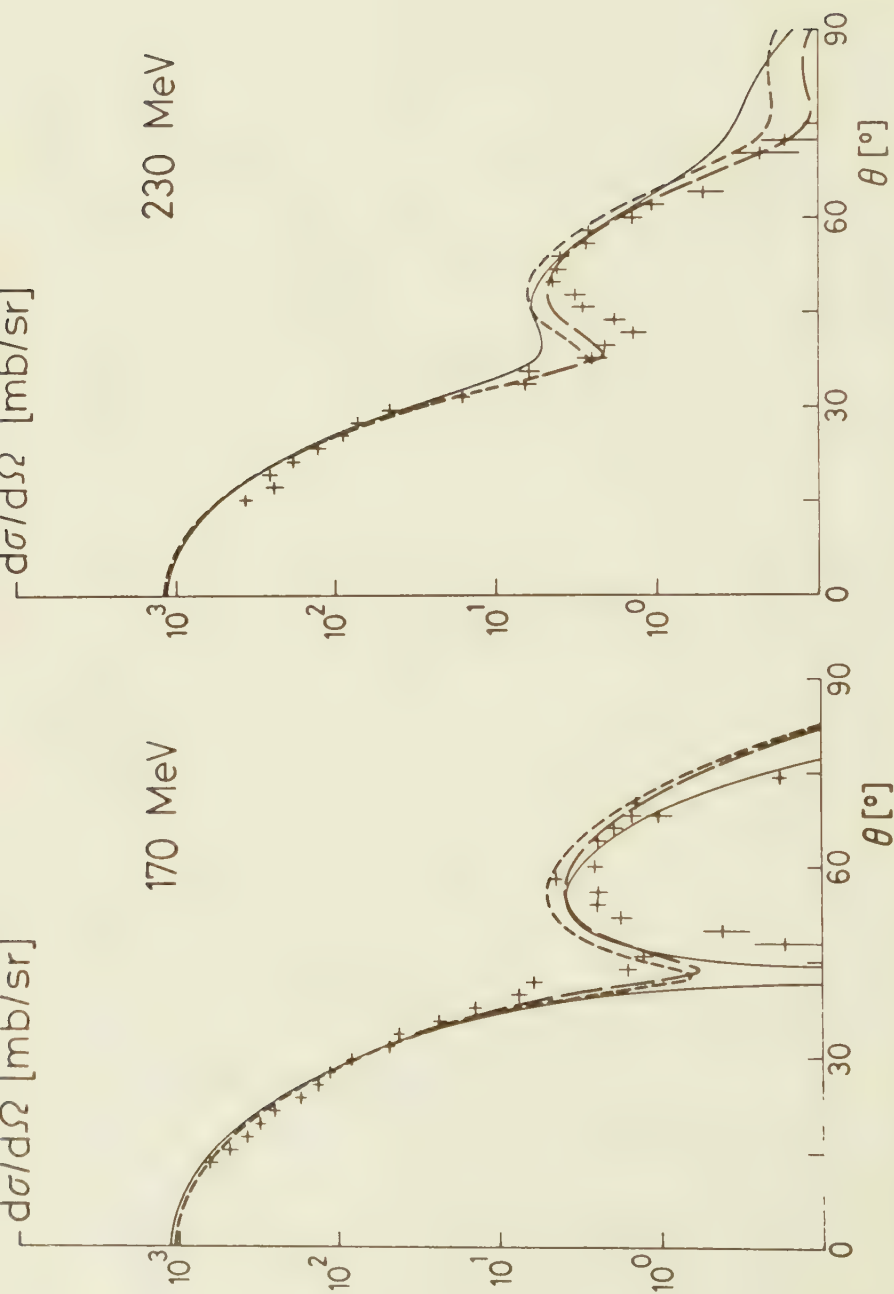
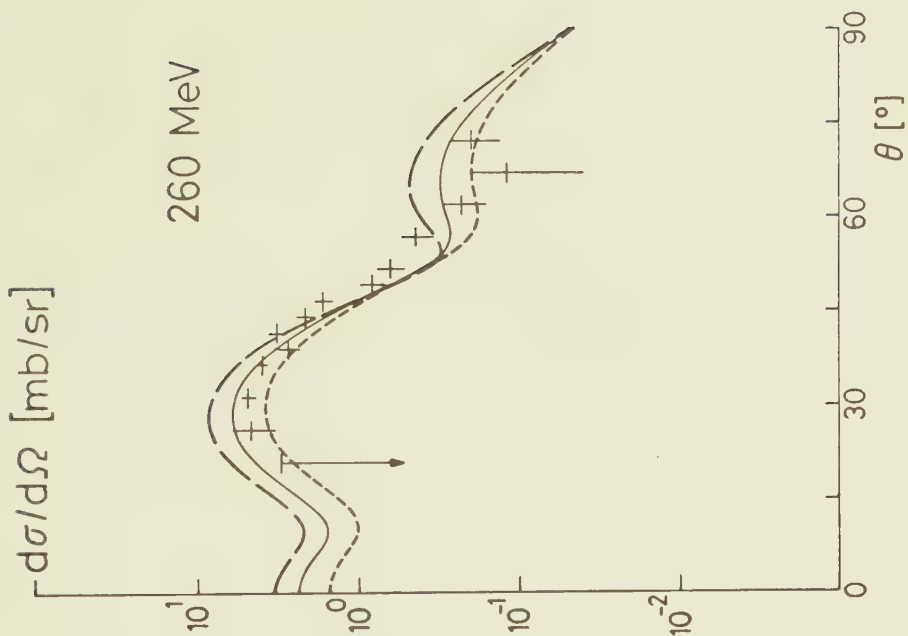
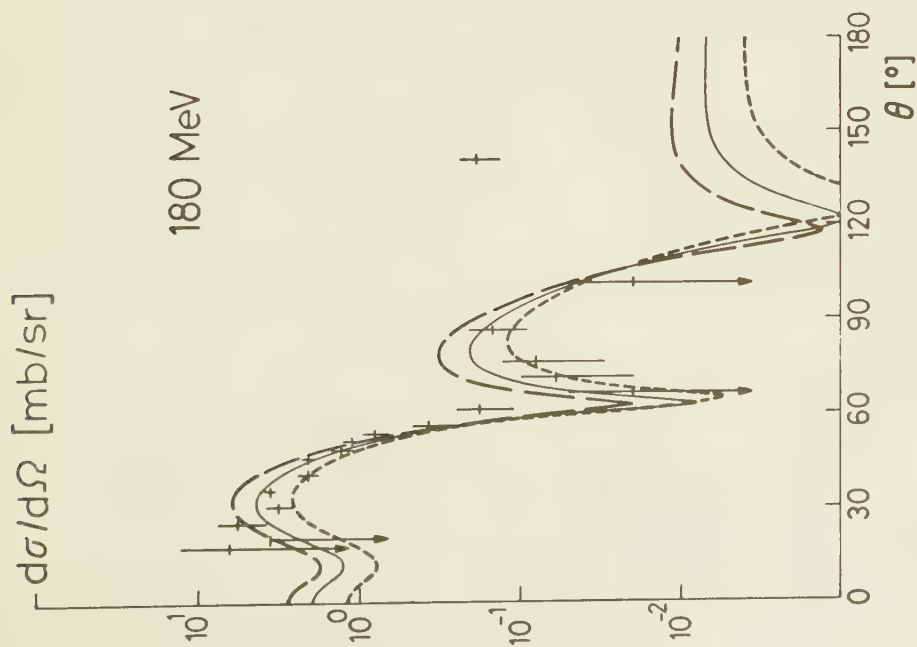


fig. 7



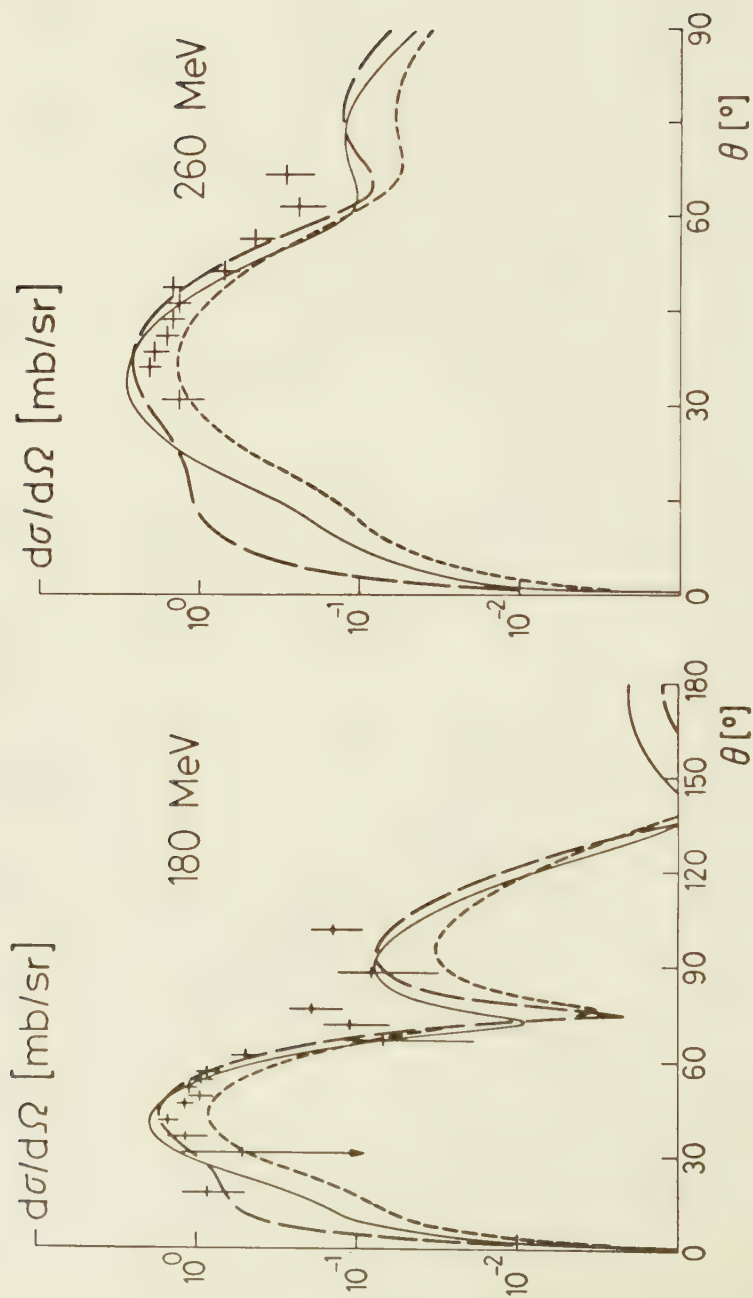


fig. 9

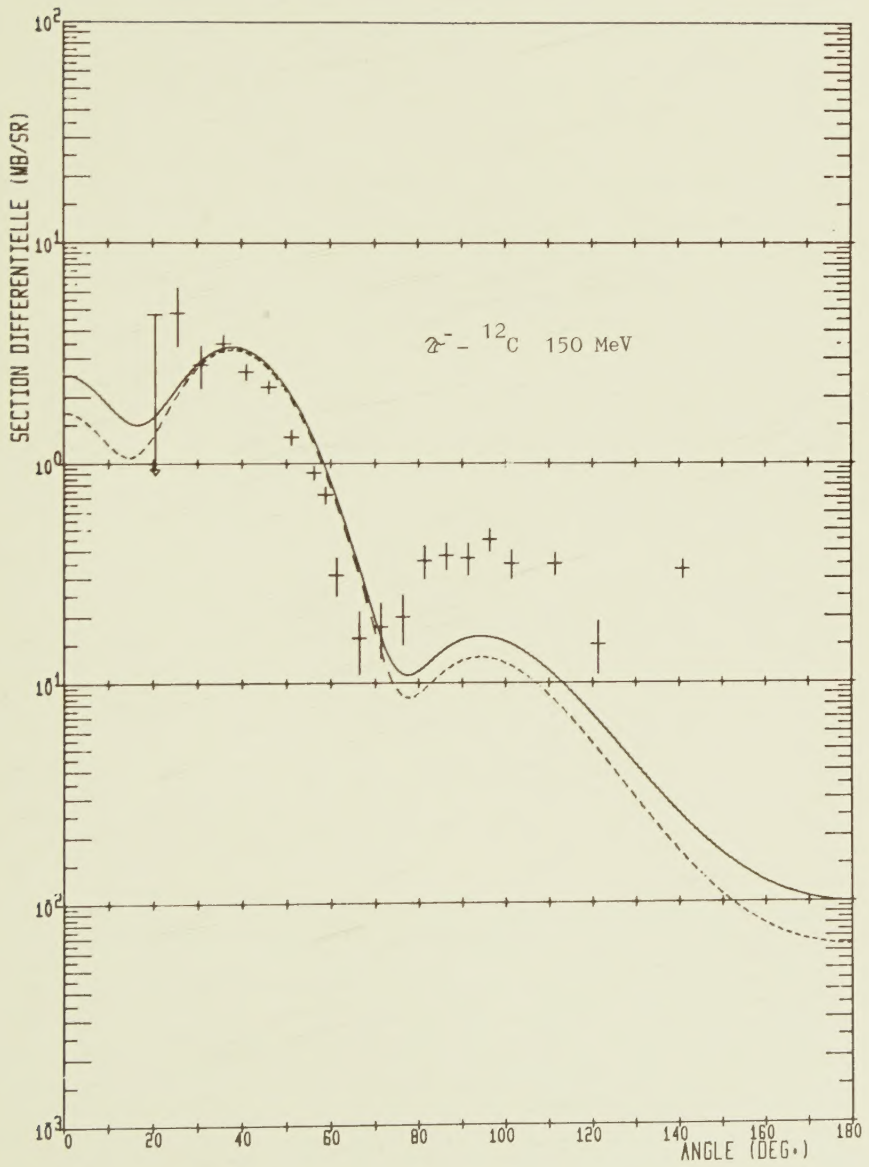


fig. 10

